

LES SYSTEMES DYNAMIQUES NON-LINEAIRES.
Didier Delignières - Janvier 1999.

Première partie: introduction aux concepts.

L'objet de l'approche dynamique est l'étude de la formation des patterns et des structures, dans les systèmes complexes. Il s'agit une méta-théorie, proposant un cadre formel d'analyse, indépendant des substrats ou niveaux d'analyse sur lesquels elle peut être appliquée. Elle est conceptuellement liée à un certain nombre de courants théoriques apparus ces dernières années, parmi lesquels on peut citer les théories de von Foerster sur le principe de la création de l'ordre à partir du bruit, les travaux d'Atlan sur le bruit et l'auto-organisation dans les organismes vivants, l'analyse systémique, amenant l'idée fondamentale selon laquelle "le tout des plus que la somme des parties", les travaux de Prigogine sur les structures dissipatives, la théorie des catastrophes de Thom, la théorie des états critiques ou la théorie du chaos (Gleick, 1991). Le courant théorique auquel nous nous réfèrons principalement est la synergetique, une approche interdisciplinaire de l'auto-organisation formulée par Haken.

Ses domaines d'application sont divers. On retrouve des approches dynamiques dans des domaines tels que l'astrophysique, la physique des particules, l'étude des turbulences hydrauliques, l'étude des champs magnétiques, la météorologie, le développement et le contrôle et l'apprentissage moteur, l'économie, la sociologie, la psychopathologie, la gestion, la prospective.

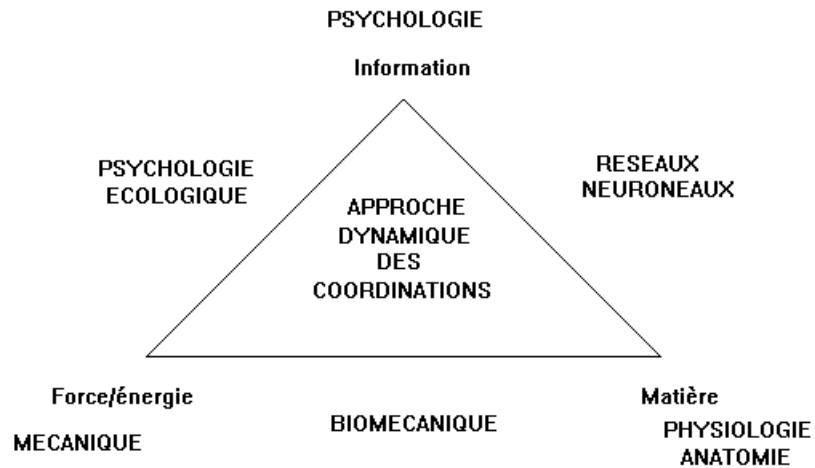


Figure 1: Le positionnement interdisciplinaire de l'approche dynamique des coordinations.

Enfin, on peut noter que l'approche dynamique constitue, une opportunité permettant de dépasser le cloisonnement disciplinaire des approches, afin de générer une multidisciplinarité de fait. Dans le domaine du comportement moteur, Beek, Peper et Stegeman (1995) suggèrent que l'approche dynamique occupe une position centrale, dépassant les centrations classiques sur les pôles "information", "matière" ou "énergie"

du système, et dépassant même des approches plus novatrices, telles que la psychologie écologique (Gibson, 1979) ou l'approche des réseaux de neurones (Figure 1).

La première partie de ce texte vise à présenter les principaux concepts qui sont utilisés dans le cadre de l'approche dynamique. On se contente à ce niveau d'une présentation « littéraire » du cadre théorique. La seconde partie est consacré à la formalisation des modèles mathématiques.

L'objet de l'approche: le comportement des systèmes complexes.

Alors que les lois classiques de la thermodynamique prévoient un accroissement de l'entropie des systèmes complexes et une dérive vers le chaos, dans certain cas le comportement des systèmes complexes évolue vers l'ordre. Dans ces cas le comportement du système peut être décrit de manière relativement simple, eu égard à la complexité intrinsèque du système. On a ainsi montré que le comportement d'un système complexe pouvait être simulé par des systèmes d'équations différentielles relativement simples.

L'objet de l'approche dynamique est constitué par les propriétés globales des systèmes complexes. L'intérêt est centré sur le comportement du système, c'est-à-dire sur la coordination entre les différents éléments qui le composent. Les propriétés globales du système ne peuvent pas se résumer à la somme des propriétés des éléments qui le compose.

L'auto-organisation.

L'idée centrale est celle de l'émergence du comportement, à partir des propriétés du système, des paramètres environnementaux, et du temps. Le comportement émerge sans nécessité de planification, de programmation par des instances extérieures au système. Dans ce sens, les théories de l'émergence s'opposent aux théories prescriptives.

Un exemple fréquemment évoqué pour illustrer ces phénomènes d'auto-organisation et d'émergence dans les systèmes complexes est celui des insectes sociaux, et notamment la construction du nid chez les termites (Kugler & Turvey, 1987; Lintern & Kugler, 1994). Une termitière constitue un produit hautement organisé, constitué d'arches, de salles, de planchers superposés, etc... Une lecture "prescriptive" du processus de sa construction suppose nécessairement l'existence d'une intelligence extérieure à la cohorte des ouvrières, une "super-termite architecte", capable d'une part de concevoir à l'avance les plans de l'ouvrage (le programme), et en outre d'en communiquer la logique à ses congénères (Figure 2). Il s'agit évidemment d'une hypothèse hautement improbable.

Deneubourg (1977), puis Kugler et Turvey (1987) montrent que la termitière peut émerger spontanément de l'interaction des comportements individuels de chaque termite. La règle de base est le termite tend à déposer de la matière (boue, excréments) aux endroits où d'autres termites l'on fait précédemment. Chaque dépôt s'accompagne de la diffusion de phéromones, substances odorantes qui accroissent la probabilité pour qu'un nouveau dépôt se fasse peu après au même endroit. A partir de dépôts aléatoires,

ces règles débouchent inexorablement sur la construction de piliers, puis d'arches, puis de plafonds, et ainsi de suite (Figure 3).

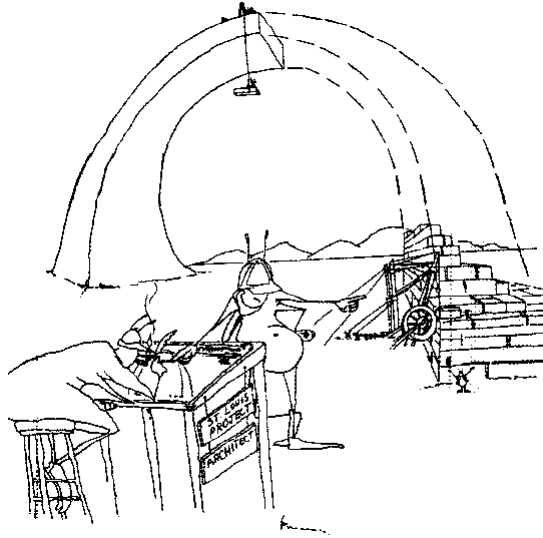


Figure 2: Illustration des conceptions prescriptives: la construction de la termitière nécessite l'élaboration, par un architecte, d'un projet planifiant les différentes étapes du travail (d'après Lintern & Kugler, 1991).

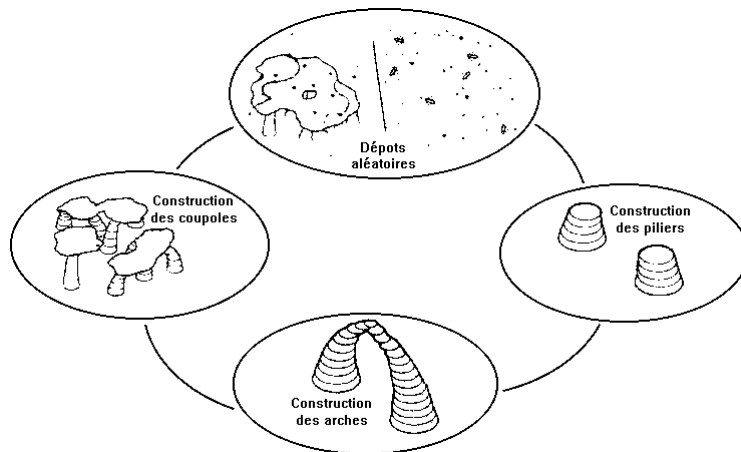


Figure 3: Le cycle de construction de la termitière: ce cycle commence par des dépôts aléatoires, puis progresse par l'émergence de piliers, d'arches puis de coupoles. Le cycle recommence alors par des dépôts aléatoires (d'après Kugler & Turvey, 1987).

Ce qu'il faut retenir de cet exemple, c'est qu'un produit hautement organisé peut émerger spontanément de l'interaction des éléments constituant le système, c'est-à-dire sans planification préalable. Ce produit, et son évolution dans le temps, est la résultante des contraintes pesant sur le système.

L'émergence exprime l'apparition de propriétés nouvelles qui apparaissent du fait de l'agrégation d'éléments au sein d'un ensemble. Cette émergence ne renvoie pas à un mécanisme *bottom-up* univoque: l'agrégation des propriétés élémentaires détermine le comportement du système, mais en retour le comportement du système canalise le comportement des éléments (*slaving principle*). Notamment les éléments peuvent avoir des propriétés qui sont inhibées par l'organisation de l'ensemble.

La complexité.

Les comportements d'auto-organisation ne peuvent apparaître qu'à partir d'un certain niveau de complexité (dans le cas précédent, il faut que la population de termites soit suffisamment importante). D'où l'idée que la complexité, qui constituait plutôt une gêne pour les approches classiques réductionnistes (voir le cognitivisme dans le contrôle moteur et les critiques de Bernstein), constitue plutôt un atout dans la perspective dynamique.

La complexité compositionnelle des systèmes est liée à la présence de nombreux éléments hétérogènes en interrelation. Le concept de degrés de liberté est central dans cette approche de la complexité. On peut concevoir les degrés de libertés comme les paramètres libres d'un système, c'est-à-dire susceptibles de varier indépendamment des autres. C'est pour quoi la dynamique des fluides a eu une grande importance dans le développement de ces théories, étant donné que par définition, un fluide possède un nombre infini de degrés de libertés (on peut citer à ce niveau les travaux sur la turbulence, voir Gleick, 1987).

L'évolution temporelle.

Couramment, le terme dynamique est compris comme renvoyant à une analyse mécanique du comportement des systèmes. Cette interprétation est suggérée notamment par la référence fréquente à des modèles oscillatoires, pour modéliser le comportement des systèmes. En fait le terme dynamique renvoie à l'évolution dans le temps du comportement du système. L'approche dynamique apparaît comme l'étude de la morphogenèse, c'est-à-dire de la formation, dans le temps des patterns et des structures.

Le caractère formel de l'approche dynamique.

Les principes de l'approche dynamique sont formels et peuvent s'appliquer quelle que soit la nature des éléments composant le système, et quelle que soit l'échelle de temps sur laquelle évolue le phénomène. On va de l'infiniment grand (les systèmes galactiques) à l'infiniment petit (les constituants des noyaux atomiques), et d'échelles de temps de l'ordre du milliard d'années à la micro-seconde. Dans le cadre de l'application de l'approche dynamique au comportement humain, les échelles de temps pourront être également fort diverses: plusieurs années (développement), de quelques heures à quelques semaines (apprentissage), de quelques minutes à quelques heures (réaction à un traitement expérimental).

Dans ce sens, tout système, à partir du moment pour il présente un certain niveau de complexité (structure) et qu'il évolue dans le temps (temporalité), peut être envisagé dans le cadre de cette approche.

Les niveaux d'analyse.

Cette approche du fonctionnement des systèmes suggère de différencier clairement les niveaux d'analyse. Par définition, le système constitue un niveau macroscopique, et les éléments constitutifs un niveau microscopique. Il est clair que le niveau macroscopique d'un chercheur pour être le niveau microscopique d'un autre.

On suppose que les échelles de temps des différents niveaux sont significativement différentes. D'une manière générale, les échelles de temps pertinentes au niveau macroscopiques sont plus étendues que les échelles des niveaux inférieurs.

Le problème de la causalité.

On reproche souvent à l'approche dynamique d'être purement descriptive, et de ne pas aborder le problème de la causalité. Il est clair que cette approche n'est pas concernée par les processus matériels sous-tendant la dynamique du système. Dans ce sens, elle ne répond pas aux critères classiques de causalité. Deux remarques peuvent être faites à ce sujet. Premièrement, les conceptions classiques de la causalité peuvent apparaître foncièrement réductionnistes, face au fonctionnement des systèmes complexes. Les relations causales entre des éléments constitutifs ne peuvent expliquer à elles seules le fonctionnement global du système. Par ailleurs, la mise en évidence de principes de coordination, de régularité de fonctionnement au niveau macroscopique peut être considérée comme explicative: elle met en évidence le fonctionnement autonome du niveau macroscopique du système.

Systemes clos et systemes ouverts.

Un système clos est un système qui ne reçoit aucune énergie de l'extérieur. Ces systèmes tendent à évoluer vers un équilibre thermodynamique (l'énergie est répartie de manière homogène dans tout l'espace du système).

Les systèmes ouverts à l'inverse sont traversés par des flots d'énergie: ils reçoivent de l'énergie de leur environnement, et renvoient de l'énergie en retour. Prigogine et Stengers parlent à ce sujet de structures dissipatives. L'ordre et la complexité, dans les systèmes ouverts, n'est pas seulement maintenus: ils s'accroissent en fonction du temps. Dans de tels systèmes, l'ordre n'existe pas a priori, il est créé dans l'action. L'ordre est essentiellement dynamique.

Les approches scientifiques classiques sont en général fondés sur le principe de l'équilibre (voir par exemple le principe d'équilibre dans les équations chimiques, ou les diverses théories de l'équilibre, en psychologie des attitudes ou des émotions). Fondamentalement, un système dynamique est loin de l'équilibre thermodynamique. L'auto-organisation ne peut apparaître que dans un système ouvert.

La non-linéarité.

La non-linéarité renvoie d'une manière générale à une rupture de la proportionnalité des causes et des conséquences. On peut rappeler l'image qui a populariser la théorie des catastrophes: un battement d'aile de papillon à Tokyo peut déclencher un ouragan en Floride.

La non-linéarité se manifeste, dans le comportement des systèmes, dans des modifications qualitative brusque du comportement des systèmes, sous l'influence de certains paramètres. Ainsi, un paramètre peut évoluer de manière linéaire et entraîner dans une certaine frange une modification linéaire, c'est-à-dire progressive, du comportement du système. Mais à partir d'une valeur critique du paramètre, on observe une transition brusque du système vers un autre type de comportement. Un comportement non-linéaire s'est alors greffé sur une frange de linéarité. Un exemple parlant est celui de la locomotion: placé sur un tapis roulant à 5 km/h, un individu se met spontanément à marcher. Lorsque l'on augmente progressivement la vitesse, on observe brusquement, aux alentours de 7.5 km/h, un passage à la course. Alors que dans un premier temps, l'accroissement de la vitesse ne produit que des modifications linéaires de l'amplitude et de la fréquence (la nature de la coordination de marche demeurant par ailleurs invariante), un accroissement minime de la vitesse, autour de 7.5 km, entraîne un bouleversement qualitatif complet, et l'adoption d'une coordination de course. On retrouve chez le cheval un tableau encore plus complexe, avec le passage successif du pas au trot, puis au galop.

Ces transitions, ou bifurcations, sont à la base de la théorie des catastrophes. L'ampleur de la transition peut être sans commune mesure avec les modifications du paramètre qui l'a générée. La non-linéarité a entraîné de nouvelles conceptions dans le domaine de la prospective (par exemple en météorologie). Une prospective basée sur la prolongation linéaire des tendances n'est plus envisageable. Il est nécessaire de prévoir les ruptures de linéarité, et la prospective ne peut produire que des scénarios alternatifs probabilistes.

Les variables collectives.

L'un des postulats majeurs de cette théorie est qu'il est possible de rendre compte du comportement du système, à un niveau macroscopique, par des *variables collectives* appelées encore *paramètres d'ordre*. Le paramètre d'ordre, construit par le chercheur, vise à "capturer", dans une mesure unique, le comportement, c'est-à-dire la coordination des différents éléments constitutifs du système. On considère alors que l'étude doit porter sur la dynamique (c'est-à-dire l'évolution) du paramètre d'ordre, plutôt que sur les composantes du système. Le paramètre d'ordre définit donc un niveau d'analyse, macroscopique, possédant sa propre pertinence et ses propres lois. Notons enfin que le paramètre d'ordre, en tant que construction du chercheur, tire sa pertinence des objectifs de la recherche. C'est en fonction des transformations du système que l'on veut mettre en lumière que l'on optera pour telle ou telle variable collective. De même, on peut avoir besoin parfois de plusieurs variables collectives pour rendre compte du fonctionnement d'un système complexe.

La variable collective capture l'ensemble de la coordination du système, dans un indicateur ne comprenant qu'un faible nombre de degrés de libertés. On substitue une dynamique à faible dimension à la dynamique hautement dimensionnelle du système.

Les attracteurs.

Un système tend à adopter, sous l'influence des contraintes qui le constituent et/ou qui pèsent sur lui, un certain type de comportement, que l'on peut qualifier de naturel, spontané ou préférentiel. C'est à ces coordinations préférentielles que l'on donne le nom d'*attracteur*.

Plusieurs types d'attracteurs sont classiquement définis: les points fixes correspondent à un état vers lequel semble converger le système: on peut citer l'exemple du pendule, qui tend sous l'action de la pesanteur à rejoindre sa position de repos. Les cycles limites renvoient à la répétition d'une trajectoire. On retrouve ce type d'attracteur dans les oscillateurs auto-entretenus. Enfin, les attracteurs étranges ou chaotiques (comme l'attracteur de Lorenz) présentent une trajectoire plus complexe, qui bien que ne se répétant jamais à l'identique, conserve une part de déterminisme.

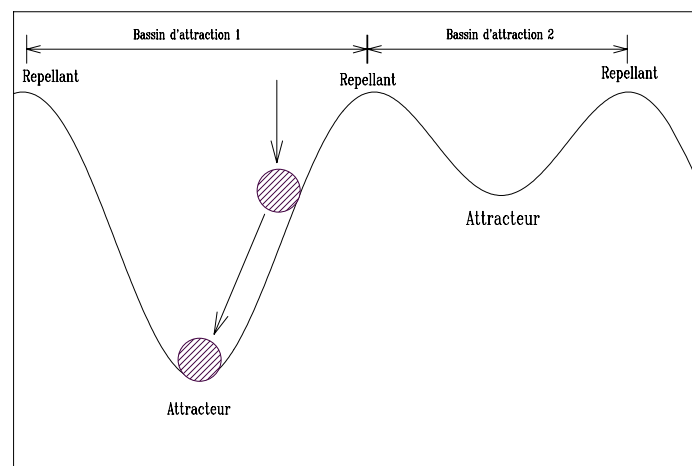


Figure 4: Représentation schématique d'un paysage d'attracteurs. Les attracteurs correspondent aux coordinations préférées du système, et les repellants aux coordinations les plus instables. Le trajet de la bille représente l'évolution de la coordination, à partir d'un quelconque état initial.

L'étendue du paramètre d'ordre (c'est-à-dire l'ensemble des coordinations possibles dans une situation donnée) est ainsi ponctué d'attracteurs, et de *repellants* (ce concept renvoie aux coordinations les plus instables, les plus "antinaturelles"). Il est courant, de manière quelque peu métaphorique, de représenter les attracteurs par des "vallées" et les repellants par des "collines" (Figure 4). On peut concevoir la *dynamique*

intrinsèque du système (c'est-à-dire les tendances spontanées de son comportement) par la trajectoire d'une bille qui tomberait dans ce *paysage des attracteurs*: quelles que soient les conditions initiales de sa chute, la bille tendra naturellement à rejoindre l'une des vallées, c'est-à-dire l'une des coordinations spontanées du système. Au sein de ce paysage, un attracteur occupe le fond d'un *bassin d'attraction*, délimité par deux repellants. La profondeur de ce bassin est représentative de la force (et corrélativement de la stabilité) de l'attracteur. La dynamique d'un système peut ne présenter qu'un seul attracteur (on parle alors de régime monostable), ou plusieurs (on parle de régime multistable).

Bifurcations et transitions de phase.

On appelle *bifurcation* ou *transition de phase* une modification qualitative du comportement du système. Une bifurcation résulte d'une modification du paysage des attracteurs. Les bifurcations constituent un événement majeur de la dynamique des systèmes complexes. La pertinence d'un paramètre d'ordre est liée au fait qu'il permet de rendre compte des bifurcations. Ce critère est pris en compte lorsque le chercheur dispose de plusieurs variables collectives concurrentes.

Stabilité et instabilité.

Stabilité et instabilité constituent le principal moteur de la dynamique du système. La caractéristique première de l'attracteur est la stabilité de la variable collective: un système calé sur son attracteur présente un comportement stable et reproductible. Par ailleurs, les bifurcations sont annoncées par des *fluctuations critiques*, c'est-à-dire un accroissement de la variabilité du paramètre d'ordre à l'approche de la transition.

Le bruit.

Le comportement d'un système dynamique n'est pas aussi déterministe que pourrait le laisser entendre les propositions précédentes. L'évolution du paramètre d'ordre est soumise à l'influence de fluctuations aléatoires, qui tendent en permanence à le déstabiliser. Une transition de phase ne peut intervenir que parce que le système est bruité, ce qui rend impossible le maintien sur une coordination repellante.

Dans les approches expérimentales classiques, le bruit est un facteur à éviter: il constitue une erreur expérimentale, susceptible de masquer les effets des variables manipulées. Dans le cadre de l'approche dynamique, il constitue au contraire une variable essentielle.

Les paramètres de contrôle.

On appelle *paramètre de contrôle* tout facteur non spécifique (c'est-à-dire ne définissant pas directement le paramètre d'ordre), susceptible lorsqu'il évolue au-delà d'une valeur critique de modifier le paysage des attracteurs. La bifurcation apparaît comme une conséquence de l'évolution du paramètre d'ordre, sans que cette évolution ne la prescrive formellement. Dans l'exemple précédent sur la transition marche-course, la

vitesse de déplacement constitue un paramètre de contrôle: le pattern de course n'est pas spécifié par la vitesse, mais induit par le dépassement d'une vitesse critique.

L'identification des paramètres d'ordre et des paramètres de contrôle constitue les étapes principales de l'étude de la dynamique des systèmes complexes.

Deuxième partie: Formalisation

Les équations décrivant l'évolution des systèmes dynamiques sont généralement des équations différentielles ce type: \ddot{x}

$$\dot{x} = F(x, \text{paramètres}, \text{bruit}) \quad (1)$$

x est un vecteur spécifiant l'état du système, \dot{x} représente sa dérivée temporelle, et F est une fonction non linéaire du vecteur, qui peut dépendre de certains paramètres et de facteurs stochastiques. x , dans ce type d'équation, est la variable collective rendant compte de la coordination dans son ensemble.

D'autres systèmes sont plus aisément simulés par des équations de différence, du type:

$$x_{i+1} = f(x_i) \quad (2)$$

Dans ce cas, la fonction non linéaire f donne la valeur de x_i en fonction de valeur qu'il avait à l'intervalle précédent. Ces deux modélisations sont liées, la seconde représentant la coupe de Poincaré de la première. Ces deux modélisations sont employées concurremment pour traiter certains systèmes à fréquences multiples.

Détermination expérimentale des variables collectives.

La variable dépendante type des expérimentations, dans l'approche dynamique, est la ou les variables collectives capturant l'ensemble de la coordination.

Description d'un système oscillant

Un certain nombre d'auteurs se sont attachés récemment à la modélisation des systèmes complexes en tant qu'oscillateurs auto-entretenus (e.g Beek & Beek, 1988; Beek, Schmidt, Morris, Sim & Turvey, 1995; Beek, Rikkert & van Wieringen, 1996). Leur but est de déboucher sur des modèles macroscopiques, contenant un faible nombre de paramètres, et capables de capturer les traits essentiels de l'évolution du système dans le temps. Ces équations dynamiques de mouvement expriment à un niveau abstrait les interactions entre les différents éléments constitutifs du système. Dans ce cadre, les mouvements rythmiques sont modélisés comme des oscillateurs obéissant à des équations différentielles de second ordre de type:

$$m\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0, \quad (3)$$

dans lesquelles x représente la position, et la notation pointée est utilisée pour représenter les dérivées temporelles. Le premier terme représente l'inertie du système, le second l'amortissement, et le troisième la raideur. L'objectif majeur de ces approches est d'identifier les fonctions non-linéaires d'amortissement et de raideur qui sont exploitées pour la production du mouvement rythmique.

Beek et Beek (1988) ont montré qu'un catalogue réduit de termes étaient autorisé pour la composition des fonctions d'amortissement et de raideur. $g(x)$ est composé de termes issus de la série de Duffing (x^1, x^3, x^5, \dots), et $f(x, \dot{x})$ de termes issus de la série de Van der Pol (x^0, x^2, x^4, \dots) et/ou de la série de Rayleigh ($\dot{x}^0, \dot{x}^2, \dot{x}^4, \dots$), séparément ou en combinaison. Ils montrent également la possibilité, en plus des non-linéarités bien connues de Rayleigh et Van der Pol, d'un nouveau type de séries qu'ils appellent les séries π -mix.

On peut développer à titre d'exemple l'oscillateur décrit par van der Pol. Il s'agit d'un oscillateur obéissant à une équation du type:

$$\ddot{x} = (1 - x^2)\dot{x} - x = \dot{x} - x^2\dot{x} - x \quad (4)$$

L'amortissement de ce pendule est négatif lorsque $x > 1$ (donc le système perd de l'énergie), et positif lorsque $x < 1$ (le système gagne de l'énergie). Cet oscillateur est donc asservi à l'amplitude de ses oscillations. L'oscillateur de Rayleigh présente pour sa part un asservissement à la vitesse.

La stratégie de modélisation utilisée par Mottet et Bootsma (1998) est basée sur l'étude de cycles moyens normalisés, supposés rendre compte de l'organisation dynamique qui émerge en réponse aux contraintes qui pèsent sur le système. On suppose que l'attracteur ne varie pas dans l'échelle de temps de l'observation, et que les fluctuations microscopiques constituent un bruit aléatoire, perturbant en continu le système autour de son pattern moyen. Ce bruit est supposé être éliminé par le processus de moyennage.

Cette méthode suppose que l'on dispose de séries temporelles rendant compte d'un certain nombre de cycles. Ces données doivent être filtrées au préalable. Dans un premier temps, la série est segmentée en demi-cycles d'un point de revirement au point de revirement suivant. Puis chaque cycle est normalisé selon un nombre constant de points équidistants, et réétalonné dans l'intervalle $[-1,+1]$. Les demi-cycles normalisés commençant par le même point de revirement (i.e. un maximum) sont ensuite moyennés points par points, et le cycle normalisé moyen est reconstitué en accolant les deux demi-cycles. On peut ensuite calculer les dérivées première et seconde de ce cycle moyen, qui sont également réétalonnées dans l'intervalle $[-1,+1]$.

La méthode combine ensuite des analyses graphiques qualitative, pour identifier les termes non-linéaires sous-tendant la dynamique du système, et des procédures statistiques quantitatives, pour estimer l'importance relative de chaque composant.

Dans un premier temps on peut utiliser les portraits de Hooke (position vs. accélération) pour une estimation directe de la fonction de raideur (Mottet & Bootsma, 1998). Le portrait de Hooke produit une droite pour un oscillateur harmonique parfait ($\ddot{x}+x=0$), et toute déviation de cette droite donne de bonnes informations sur les termes non-linéaires à inclure dans le modèle. Par exemple le terme cubique de Duffing produit une courbe typique en N, suggérant un comportement de ressort mollissant (Mottet & Bootsma, 1998).

La détermination des termes pertinents d'amortissement n'est pas aussi aisée. Beek et Beek (1988) ont proposé une méthode, dite W-method, basée sur une analyse de régression multiple. Leur point de départ est une équation du type:

$$\ddot{x} + x + W(x, \dot{x}) = 0, \quad (5)$$

dans laquelle $W(x, \dot{x})$ résume la contribution de l'ensemble des composantes non-linéaires du mouvement (c'est-à-dire la déviation continue par rapport au mouvement harmonique parfait). $W(x, \dot{x})$ peut facilement être calculé à partir des données expérimentales, et est utilisé comme variable dépendante dans une régression multiple contre tous les termes permis (i.e. x , x^3 , x^5 , \dot{x} , \dot{x}^3 , $x^2\dot{x}$, voir Beek & Beek, 1988), afin de déterminer quels coefficients ont une influence significative sur les variations de $W(x, \dot{x})$ dans le temps.

Beek *et al.* (1995) notent que la précision de la W-method est meilleure pour l'estimation des termes conservatifs de raideur, que pour les termes non-conservatifs d'amortissement, dans la mesure où la méthode peut souffrir de l'inaptitude de la régression à prendre en compte les contraintes de signe sur les coefficients d'amortissement nécessaires à la production d'un cycle limite. Pour obtenir un oscillateur auto-entretenu, le terme d'amortissement linéaire doit en effet être négatif, et au moins un des termes non-linéaires doit être positif. Mottet and Bootsma (1998) notent que l'utilisation de la régression multiple sur tous les termes possibles pour $W(x, \dot{x})$ donne dans la plupart des cas des résultats inconsistants (par exemple, des modèles instables, ou des termes d'amortissement non-significatifs). C'est pourquoi on utilise dans un premier temps des méthodes graphiques pour dériver un modèle minimal avant d'appliquer la W-method.

Pour isoler la contribution des termes non-linéaires, on commence par réaliser une régression de \ddot{x} contre tous les termes linéaires et non-linéaires de raideur, précédemment identifiés, et l'amortissement linéaire (\dot{x}). Les résidus (RES) de cette régression sont sensés refléter la contribution de l'amortissement non-linéaire sur le comportement du système. La méthode proposée par Beek et Beek (1988), consiste alors, pour rechercher un comportement de type Van der Pol, à représenter RES/\dot{x} en fonction de x (on recherche alors la présence de paraboles, exprimant la présence de termes en x^2 ou x^4), et pour un comportement de type Rayleigh, à représenter RES en fonction de \dot{x} (on recherche alors des courbes en N, révélant la présence de termes en x^3). On peut également tester la présence de composantes π -mix, en représentant RES/\dot{x} en fonction de $x\dot{x}$ (on trouvera alors une parabole pour les comportements π -mix pairs, et une courbe en N les comportements π -mix impairs, voir Beek et Beek, 1988).

Le but de cette analyse graphique est de déterminer un modèle dynamique minimal, contenant le moins de termes possibles. Ensuite l'importance relative de chaque coefficient est évaluée par une procédure de régression multiple (W-method, Beek and Beek, 1988).

L'équation de mouvement obtenue, caractérisée qualitativement par la nature des termes la composant, et qualitativement par leur importance relative, constitue un paramètre d'ordre dont on pourra tester la stabilité et l'évolution en fonction de diverses dimensions de la situation.

Description d'une système oscillant dans l'espace de phases

Le comportement d'un oscillateur peut également être modélisé dans l'espace des phases. Cet espace des phases est une représentation du comportement d'un système oscillant selon ses coordonnées position et vitesse. Par définition, la phase est égale à:

$$\phi = \tan^{-1}(\dot{x}/x), \quad (6)$$

\dot{x} et x ayant été préalablement standardisé (soit par un réécalonnage dans l'intervalle $[-1, 1]$, soit par division par l'écart-type de la distribution. On peut noter que le calcul de la phase suppose un filtrage préalable adéquat des données expérimentales. La phase est exprimée en degrés. Les points de revirement de l'oscillateur correspondent aux phases 0 et 180, et les passage à la position de repos aux phases 90 et 270 (Figure 5)

L'espace des phases permet une description visuelle particulièrement intéressante des oscillateurs et des attracteurs qui les caractérisent. Par exemple le mouvement d'un pendule pesant à friction peut être modélisé à partir de la phase de son angle par rapport à la verticale. Le portrait de phase décrit une spirale convergente au centre de l'espace. Le système possède un attracteur point fixe, qui est la position d'équilibre stable du pendule (Figure 6).

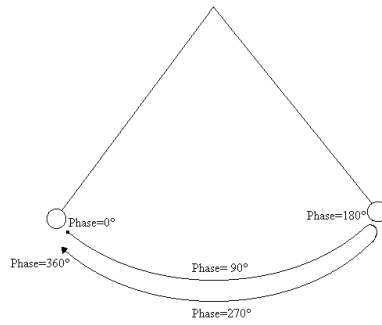


Figure 5: Illustration du concept de phase, sur un pendule pesant.

Si le système reçoit à chaque cycle une force extérieure (c'est le cas de l'oscillateur de van der Pol, dont on a parlé précédemment), les oscillations vont être entretenues, et le portrait de phase mettra en évidence un cycle limite, trajectoire orbitale se répétant de cycle en cycle. Le cycle limite attire les trajectoires dans l'espace des phases. En cas de perturbation (ralentissement ou accélération du pendule), la trajectoire revient rapidement sur le cycle limite (Figure 6).

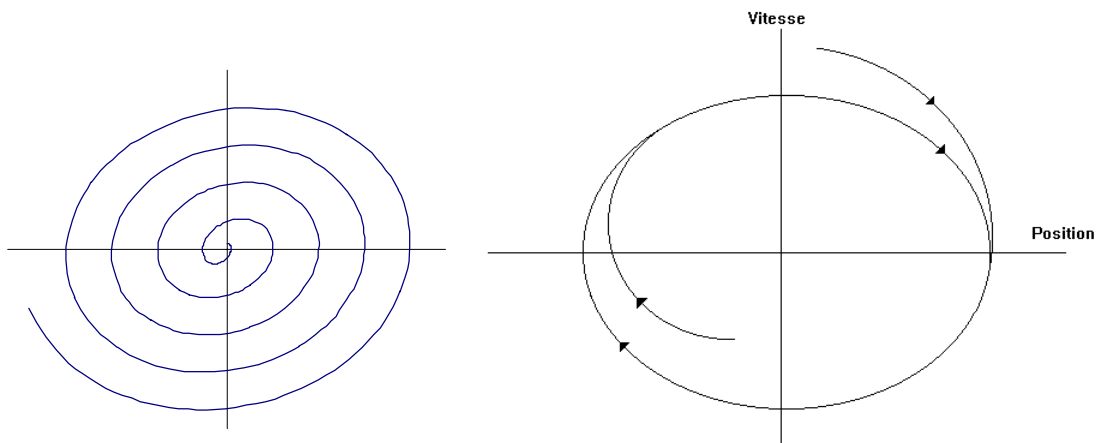


Figure 6: Représentation d'un attracteur point fixe et d'un attracteur cycle limite, dans l'espace des phases.

Les attracteurs définis précédemment ont respectivement 1 et 2 dimensions. Des attracteurs plus complexes peuvent être décrits, par des tores à n dimensions.

Les systèmes les plus complexes (équations différentielles d'ordre supérieur à deux) présentent généralement des attracteurs chaotiques. Dans ce cas les trajectoires du portrait de phase ne peuvent être modélisées de manière aussi stricte. Néanmoins on observe une quasi périodicité, et seules certaines régions de l'espace de phases sont visitées par la trajectoire.

La définition de la phase lui confère un certain nombre de propriétés. Tout d'abord, la phase est proportionnelle au temps, ou à la fraction du cycle parcouru. Par conséquent, la dérivée première de la phase est égale à la fréquence propre du pendule (la représentation graphique d'une phase, par rapport au temps, produit de ce fait une courbe caractéristique en dents de scie).

$$\dot{\theta} = \omega \quad (7)$$

La phase permet de décrire les mouvements de l'oscillateur en faisant abstraction de l'amplitude réelle. Le rayon du portrait de phase représente l'énergie contenue dans le système:

$$E = (\dot{x}^2 + x^2)^{1/2} \quad (8)$$

Dans le cas d'un oscillateur harmonique, le rayon reste constant. Ce qui est logique puisqu'il n'y a aucune dissipation, mais un échange constant entre énergie cinétique et énergie potentielle.

Variables collectives pour les systèmes d'oscillateurs couplés.

Deux types de variables collectives sont principalement utilisés dans la littérature. Lorsque les deux oscillateurs sont isochrones, on a recours au décalage de phase. Soient deux oscillateurs caractérisés par des trajectoires sinusoïdales:

$$\begin{aligned} x_1 &= a \sin(\omega t + \theta_1) \\ x_2 &= b \sin(\omega t + \theta_2) \end{aligned} \quad (9)$$

Le décalage de phase est défini par $\phi = \theta_1 - \theta_2$. Lorsque $\phi = 0$, les deux oscillateurs sont en phase. Ils sont en antiphasse lorsque $\phi = 180^\circ$.

Soient deux oscillateurs présentant des fréquences différentes

$$\begin{aligned} x_1 &= a \sin(\omega_1 t + \theta_1) \\ x_2 &= b \sin(\omega_2 t + \theta_2) \end{aligned} \quad (10)$$

Dans ce cas une variable collective pertinente est le rapport de fréquence ω_1/ω_2 . Cette variable collective peut être représentée par les figures de Lissajous, consistant en un graphique avec x_1 en abscisse et x_2 en ordonnée. Dans le cas d'un rapport de fréquence de 1:1, la figure de Lissajous a une forme linéaire ou circulaire, et une forme de 8 dans le cas d'un rapport 2:1. (Figure 7).

La coordination entre deux oscillateurs peut être envisagée au travers d'autres indices, lors que le calcul des phases est moins évident. Vereijken (1991) utilise les cross-corrélations, c'est-à-dire les corrélations entre séries temporelles, avec possibilité de décaler les deux séries. Deux séries coordonnées doivent présenter une cross-corrélation élevée, et le décalage du maximum de cross-corrélation donne une indication sur le décalage entre les deux oscillateurs (Delignières et al., 1998).

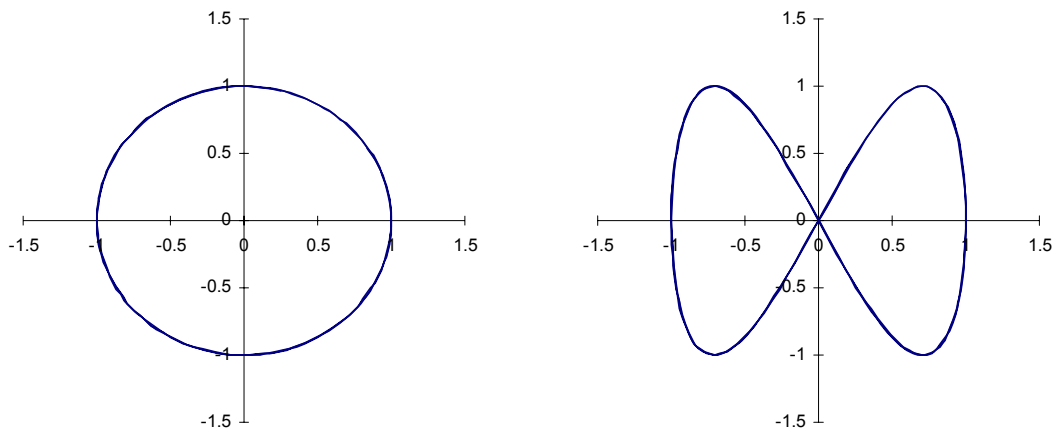


Figure 7: Figures de Lissajous, obtenues pour un rapport de fréquence 1:1 (décalage de phase 90°), et pour un rapport de fréquence 2:1.

Le paysage des attracteurs.

Soit une variable collective x , dont la dynamique peut être représentée par l'équation suivante:

$$\dot{x} = f(x) + \text{bruit} \quad (11)$$

$$\text{ou } \dot{x} = -dV(x)/dx + \text{bruit} \quad (12)$$

L'axe des x représente toutes les valeurs envisageables de la variable collective. x représente une valeur donnée de cette variable, $f(x)$ la force tendant à déstabiliser la variable collective, et $V(x)$ le potentiel produisant cette force. $V(x)$ décrit la grandeur et la direction de la tendance de x à changer en fonction de sa propre valeur. \dot{x} est la première dérivée de la variable collective. Lorsque $\dot{x}=0$, le système est en équilibre.

La fonction de potentiel $V(x)$ peut être conçue comme l'énergie potentielle de la variable collective. Si l'on considère par exemple que la variable x a un mouvement harmonique parfait ($\ddot{x} + x = 0$), c'est-à-dire que la force de rappel ($F(x)$, Figure 8) est proportionnelle à la distance du mobile à la position de repos. La pente de la droite renvoie la raideur du système. La fonction d'énergie potentielle $V(x)$ présente deux maxima aux positions extrêmes, et un minimum au passage en position de repos (à ce niveau toute l'énergie est cinétique).

Le paysage des attracteurs, dont on a évoqué précédemment la représentation métaphorique sous forme de vallées et de collines, n'est autre que la fonction de potentiel du paramètre d'ordre. Les attracteurs correspondent aux puits de potentiel, et les repellants aux maxima. Fonctions de potentiel et équations de mouvement représentent deux modélisations alternatives du comportement des systèmes.

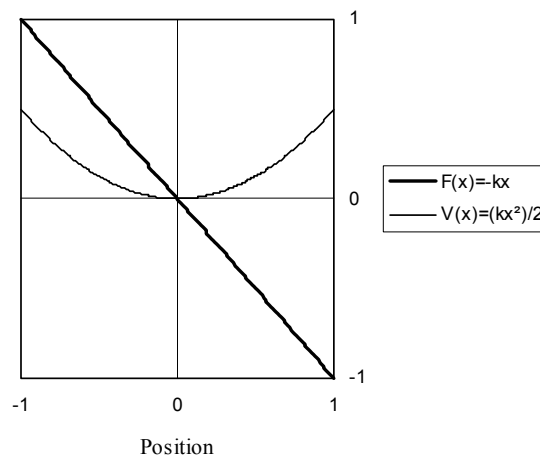


Figure 8: Force de rappel et fonction de potentiel, pour un oscillateur élastique.

Mesures de la stabilité.

Variabilité autour de la moyenne de la variable collective.

La variabilité autour de la moyenne de la variable collective est la mesure la plus évidente de la stabilité du système. Cette variabilité est minimale lorsque le système est sur un attracteur. Les différences de variabilité permettent de déterminer la stabilité relative de deux états stables (c'est-à-dire la profondeur du puits de potentiel).

La stabilité peut être évaluée au travers de l'écart-type (constitué soit de mesures continues, soit de mesures discrètes), lorsque la variable collective est exprimée au travers d'une valeur supposée demeurer stable (par exemple, un décalage de phase dans une coordination de rapport de fréquence 1:1, le rapport de fréquence dans une coordination multifréquence, etc...). On peut également travailler sur une valeur par cycle (le décalage de phase à un moment particulier). La taille de l'échantillon doit être déterminée en conséquence.

Lorsque la variable collective s'exprime au travers d'un pattern (par exemple une série temporelle oscillante), d'autres évaluations de la variabilité peuvent être envisagées:

- l'analyse spectrale du signal par analyse de Fourier permet d'avoir une image de sa complexité, en évaluant le nombre de fréquences nécessaire à la description du signal (Cordier *et al.*, 1996), ou du pourcentage de la puissance totale représenté par la fréquence fondamentale (Holt, Jeng, Ratcliffe & Hamill, 1995).

- la mesure de l'auto-corrélation du signal, qui permet d'évaluer sa reproductibilité cycle à cycle.

- la mesure de la corrélation entre un cycle moyen normalisé et les cycles effectivement observés.

D'une manière générale, ces mesures de variabilité supposent des séries temporelles conséquentes, représentant un certain nombre de cycles successifs.

Temps de relaxation local

Le temps de relaxation local (t_{rel}) est le temps que met le système à retrouver son état stable (x_f) après une perturbation de faible amplitude. Mathématiquement, on a la relation suivante:

$$x(t) = x_f + \varepsilon \cdot e^{-t/t_{rel}} \quad (13)$$

Il s'agit d'une fonction exponentielle de décroissance, en fonction du temps. ε représente l'ampleur de la perturbation: il est égal à la différence entre la valeur de la variable collective à l'état de repos, et la valeur au temps 0 de la perturbation ($\varepsilon = x_0 - x_f$). t_{rel} est l'inverse du taux de décroissance vers l'état stable. Plus t_{rel} est faible, plus l'attracteur est stable. Lorsque t_{rel} tend vers l'infini, l'attracteur a perdu sa stabilité.

Le taux de décroissance peut être déterminé à partir d'une mesure continue de la variable collective lors de tout ou partie de la relaxation, par la recherche du meilleur ajustement linéaire (méthode des moindres carrés par exemple).

Le temps de transition (switching time).

Une autre mesure possible de la stabilité est le temps de transition d'un attracteur à l'autre. Plus l'attracteur d'origine a une grande stabilité intrinsèque, plus le système met de temps à le quitter pour rejoindre un autre attracteur. Cette propriété a été étudiée par Scholz et Kelso (1990), dans une étude sur les coordinations bi-manuelles.

Transitions de phase.

Une transition de phase ou bifurcation décrit la modification brusque du comportement d'un système, liée à l'évolution d'un paramètre de contrôle au-delà d'une valeur critique. Au niveau du paysage des attracteurs, une transition détermine la disparition de certains attracteurs, et l'apparition d'autres.

La formalisation mathématique des transitions de phase repose sur la détermination d'équations, dont les paramètres représentent les paramètres de contrôle du système. Par exemple, on peut citer la bifurcation de Pitchfork. Soit un potentiel répondant à l'équation suivante:

$$V(x) = ax^2 + bx^4 \quad (14)$$

On considère que b est positif. Si a est également positif, le système présente un attracteur unique, centré sur $x=0$. Pour a négatif, $x=0$ devient un repellant, et deux attracteurs apparaissent, pour $x = \sqrt{-a/b}$ et $x = -\sqrt{-a/b}$. a est un paramètre de contrôle dans ce cas et $a=0$ constitue la valeur critique. La bifurcation de Pitchfork détermine donc le passage d'un régime monostable à un régime bi-stable (Figure 9).

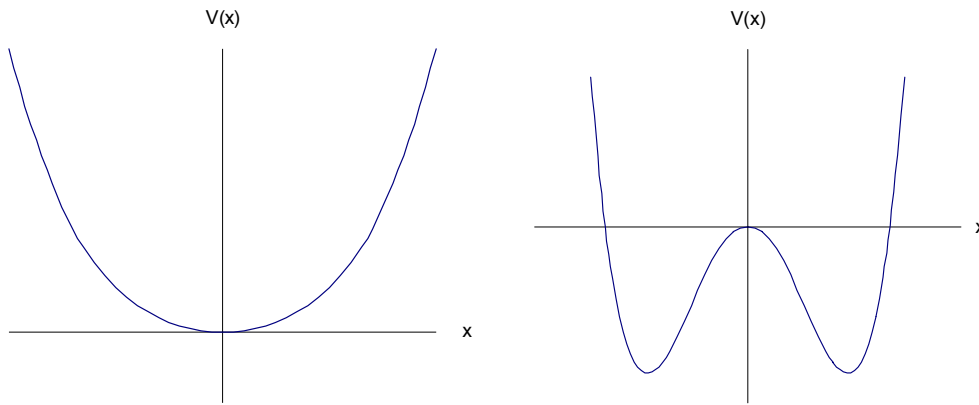


Figure 9: Bifurcation de Pitchfork. à gauche, $b=1$, à droite, $b=-1$.

Un autre exemple considère le potentiel asymétrique suivant:

$$V(x) = kx + ax^2 + bx^4 \quad (15)$$

On fixe $a=-1/2$ et $b=1/4$ et on analyse l'évolution du système pour un accroissement de k . Lorsque k est positif et faible, deux attracteurs quasi symétriques autour de $x=0$ coexistent. Pour $k=\sqrt{4/27}$, un des attracteurs disparaît et devient un repellant local. Au-delà de cette valeur, le repellant disparaît et seul subsiste un attracteur (Figure 10).

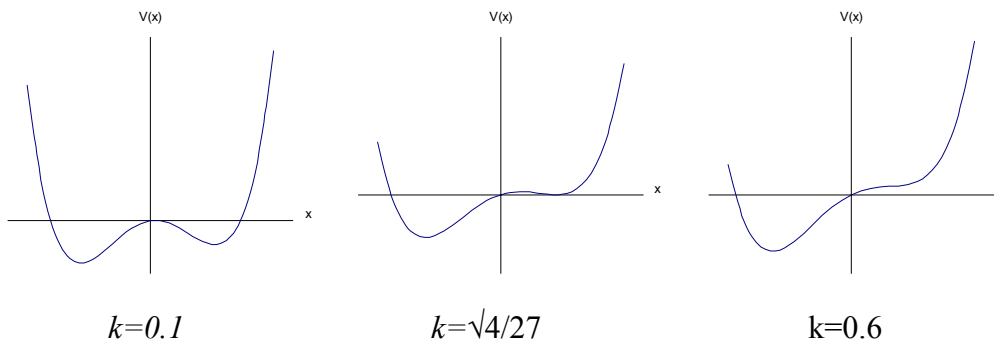


Figure 10: Fonctions de potentiel $V(x) = kx + ax^2 + bx^4$, pour trois valeurs de K .

Haken, Kelso et Bunz ont proposé un modèle rendant compte de la dynamique de la phase relative dans les tâches de coordination bimanuelles. Selon ce modèle,

$$V(\phi\phi) = -a\cos(\phi\phi) - b\cos(2\phi\phi) \quad (16)$$

La forme de la fonction $V(\phi\phi)$ dépend du rapport b/a . Pour $b/a=1$, on observe deux minima, centrés sur 0 et 180° . La diminution de ce rapport entraîne un comblement progressif de l'attracteur 180° , qui est achevée pour $b/a=.250$. Au-delà ne subsiste qu'un seul minimum à 0° (Figure 11).

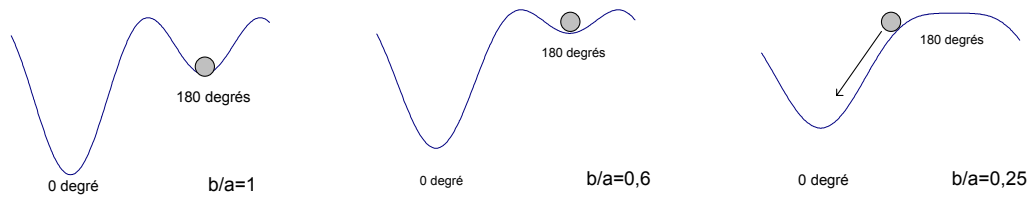


Figure 11: Evolution du paysage des attracteurs avec l'augmentation de la fréquence d'oscillation des index, dans la tâche de coordination bimanuelle.

Cette équation de potentiel suggère que les deux oscillateurs sont symétriques, c'est-à-dire possèdent la même fréquence propre. Lorsque cette symétrie est rompue, on observe un décalage systématique des puits de potentiel, fonction de cette dissymétrie. On peut rendre compte de ce phénomène (*symetry breaking*) par l'ajout d'un terme à la fonction de potentiel, exprimant la différence entre les fréquences propres des deux oscillateurs:

$$V(\phi\phi)=\Delta\omega-\text{acos}(\phi\phi) -b\text{cos}(2\phi\phi) \quad (18)$$

On peut remarquer que cette rupture de symétrie n'est pas nécessairement liée à des processus mécanique (par exemple une différence d'inertie entre les deux oscillateurs). Elle peut être également liée à des problèmes de latéralité, ou de dominance hémisphérique. Encore une fois, les équations de potentiel sont susceptibles de rendre compte de manière identique de propriétés émergentes liées à des processus microscopiques diversifiés.

Dynamique intrinsèque et information comportementale

Le concept de dynamique intrinsèque désigne le fonctionnement spontané du système. Elle correspond au fonctionnement naturel du système, émergent des contraintes de sa niche écologique. Cependant, les systèmes doués d'intentionnalité sont susceptibles d'adopter des comportements étrangers à cette dynamique intrinsèque (par exemple, des comportements correspondant aux repellants du paysage des attracteurs).

Le concept d'information comportementale (Zanone et Kelso, 1992) permet de modéliser l'influence des intentions sur le comportement. L'information est l'expression, dans la métrique de la variable collective, du comportement à réaliser (ψ). Son adjonction à l'équation de potentiel prend en compte la déformation transitoire de la fonction, et de la disponibilité nouvelle d'un attracteur (Figure 12).

$$V(\phi\phi)=-\text{acos}(\phi\phi) -b\text{cos}(2\phi\phi)-c\text{cos}(\phi-\psi\phi) \quad (19)$$

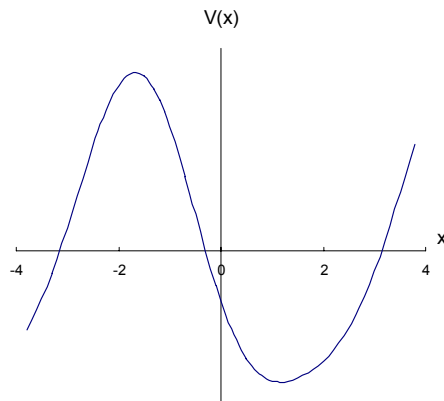


Figure 12: Influence d'une information comportementale sur la fonction de potentiel. Dans cet exemple ($\psi=90$).

Modifications à long terme du paysage des attracteurs.

La pratique à long terme d'un comportement intrinsèquement instable débouche sur une modification à long terme du paysage des attracteurs. L'équation de potentiel se stabilise sur un nouveau modèle. Par exemple; Zanone et Kelso (1997) ont montré que la fonction suivante

$$V(\phi) = -a\cos(\phi) - b\cos(2\phi) - c\cos(4\phi) \quad (20)$$

rendait compte des effets de la pratique d'une coordination à 90° de décalage de phase entre les deux index. L'expérience montre que la coordination correspondante s'est stabilisée, mais qu'en outre la coordination symétrique ($\phi=270$) s'est également stabilisée, bien que n'ayant pas été spécifiquement pratiquée. La courbe de potentiel représentant l'équation précédente rend compte de ces deux phénomènes (Figure 13).

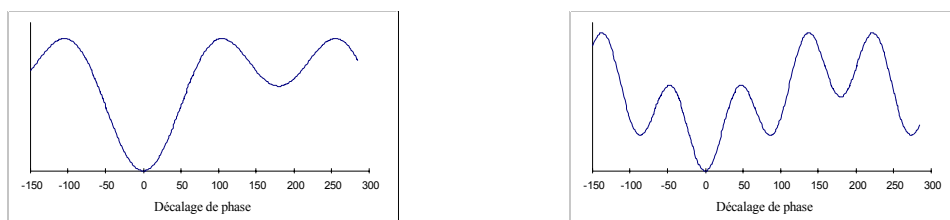


Figure 13: Evolution du potentiel liée à la pratique d'une coordination intrinsèquement répulsive. La figure de gauche représente la dynamique intrinsèque du système, celle de droite le poentiel après apprentissage.

Bruit et transition de phase.

On considère que des forces stochastiques agissent en permanence sur le système et tendent à le déstabiliser. La résistance du système à la perturbation sera maximale au niveau des attracteurs, et minimale au niveau des repellants. Lorsque sous l'influence d'un paramètre de contrôle, le potentiel lié à un attracteur s'accroît (c'est-à-dire que l'attracteur se "comble", le système est moins résistant, et la probabilité pour que les forces stochastiques lui fasse quitter le bassin d'attraction augmente. C'est pourquoi les transitions de phase sont annoncées par *fluctuations critiques* (accroissement de la variabilité autour de la moyenne) et par des *ralentissements critiques* (accroissement du temps de relaxation local).

Le bruit est formalisé par l'ajout d'une fonction stochastique dans les équations de mouvement:

$$\dot{\phi} = -d(V(\phi)/d\phi + \sqrt{Q}\zeta(t) \quad (21)$$

dans laquelle $\zeta(t)$ représente une fonction aléatoire normalisée (de moyenne 0 et d'écart-type 1), et \sqrt{Q} représente l'intensité du bruit. Ces équations présentent donc deux parties distinctes, une partie déterministe, et une partie stochastique. Il s'agit d'un facteur essentiel dans la formalisation des systèmes dynamiques. D'une manière générale, le bruit est nécessaire à l'apparition des transitions de phase. En effet, sans bruit un système pourrait demeurer sur un repellant (i.e. un état d'équilibre instable), et les transitions ne pourraient apparaître. Par ailleurs, le bruit détermine la vitesse de transition, qui constitue une caractéristique importante du fonctionnement des systèmes complexes.

Le concept de bruit, dans l'approche dynamique, se démarque des acceptions courantes (notamment en psychologie cognitive). Il représente l'ensemble des sous-systèmes qui n'ont pas été capturés par la variable collective. Il est considéré méthodologiquement comme une constante, pour un système donné. Il renvoie en fait à tout ce qui n'a pu être modélisé dans la partie déterministe de l'équation.

L'hystérésis

Le phénomène d'hysteresis suggère que l'évolution du comportement d'un système est lié à l'histoire de ce système. On remarque en effet que la valeur du paramètre de contrôle pour laquelle apparaît une transition dépend du sens d'évolution de ce paramètre. La coexistence de plusieurs attracteurs, lors d'une transition, explique cet effet. Le système reste sur son ancien attracteur, malgré l'apparition d'un nouvel attracteur, et malgré le fait que ce nouvel attracteur soit plus puissant. Pour quitter l'ancien attracteur, il faudra attendre que celui-ci se soit suffisamment aplani et/ou que l'instabilité du système lui ait permis de quitter son bassin d'attraction. De tels phénomènes d'hystérésis ont été décrits dans la transition marche/course: ainsi Durand *et al.* (1994) montrent que la transition marche-course se réalise à 7.88 km/h lorsque la vitesse est progressivement augmentée, et la transition inverse à 7.13 km/h lors d'une diminution progressive de la vitesse (Figure 14).

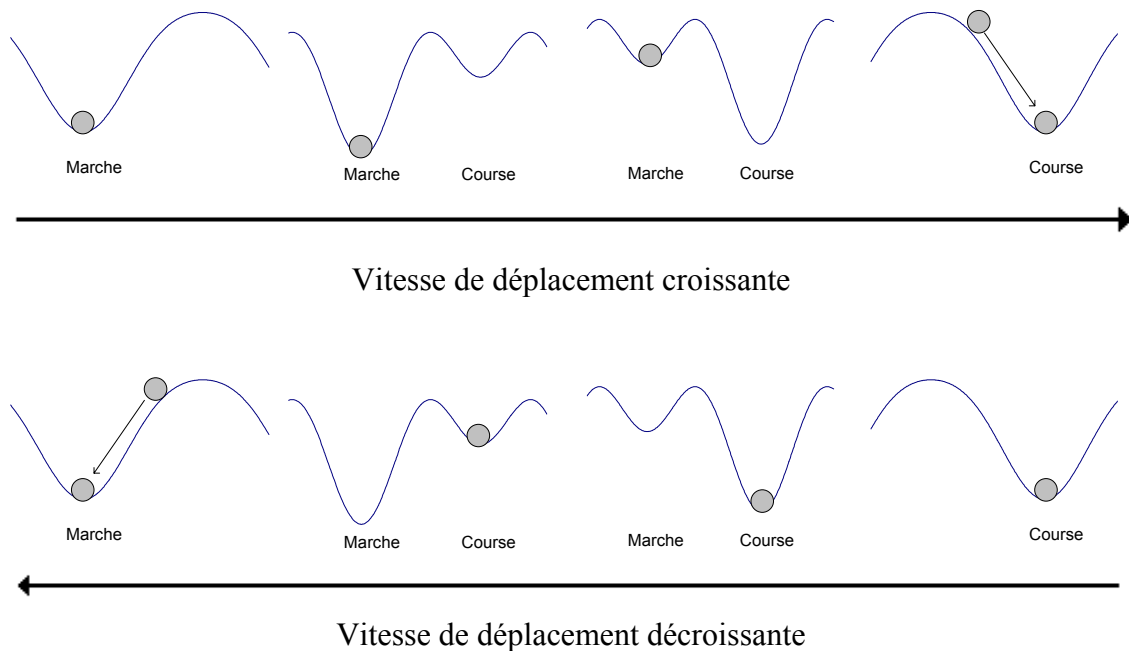


Figure 14: Illustration du phénomène d'hystérésis, dans la transition marche-course

Le décalage entre les valeurs de transition du paramètre de contrôle en fonction du sens de son évolution détermine la plage d'hystérésis. Certains paramètres de contrôle font varier l'étendue de cette plage. Par exemple, si l'on charge le sujet lors d'une expérimentation sur la transition marche-course, la plage d'hysteresis diminue avec l'accroissement de la charge, jusqu'à disparaître pour une charge de 14 kg (Beuter et Lefebvre, 1988).

La dynamique des systèmes à fréquences multiples.

Les approches précédentes s'appliquent à des systèmes d'oscillateurs couplés isochrones. Fréquemment les systèmes complexes peuvent être modélisés sous forme de couplages d'oscillateurs à fréquences propre différentes. La variable collective utilisée pour rendre compte de ce type de système est le rapport de fréquence entre les deux oscillateurs. L'étude de ces systèmes montrent qu'en fonction de la force du couplage, certains attracteurs émergent spontanément. Les attracteurs sont caractérisés par des rapports rationnels, et les attracteurs les plus stables sont caractérisés par des rapports d'ordre faible (c'est-à-dire les rapports avec les plus petits numérateurs et dénominateurs (1:1, 1:0, 1:2)).

La modélisation de ces systèmes considère qu'un des oscillateurs est forcé par l'autre. On a recours à des équations de différence unidimensionnelles:

$$\theta_{n+1} = f_{\Omega}(\theta_n) = \theta_n + \Omega + g(\theta_n) \quad (22)$$

Avec

$$g(\theta_n) = g(\theta_{n+1}) \quad (\text{mod } 1)$$

La phase de l'oscillateur forcé (θ_n) est mesurée périodiquement, à des intervalles $t_n = 2\pi n / \omega$, en utilisant la fréquence de l'oscillateur externe comme timer. Ω représente le rapport entre les fréquences naturelles des deux oscillateurs lorsqu'ils ne sont pas couplés. $g(\theta_n)$ est une fonction non linéaire rendant compte du couplage, c'est-à-dire de l'influence de l'oscillateur externe sur l'oscillateur forcé.

Si $\Omega = 1$ et $g(\theta_n) = 0$, alors $\theta_{n+1} = \theta_n$. On a un rapport 1:1, stable.

Si $\Omega < 1$ et $g(\theta_n) = 0$, θ_n croît d'une constante à chaque itération.

Dans le cas particulier des cartes circulaires sinusoïdales,

$$g(\theta_n) = (K/2\pi) \sin 2\pi \theta_n \quad (23)$$

Au cours de l'itération, la phase du pendule forcé est modifiée sous l'effet du couplage. L'influence du forçage dépend de la phase de l'oscillateur forcé. Le couplage n'est donc pas constant, mais atteint des valeurs maximales pour les excursions maximales de l'oscillateur forcé (à $\theta = \pi/2 \pmod{\pi}$, i.e. $x' = 0$).

Le comportement résultant est caractérisé par le rapport moyen entre la fréquence de forçage et la fréquence du pendule forcé, que l'on appelle nombre d'enroulement (*winding number*), défini par:

$$W(K, \Omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} [(\theta_n - \theta_0) / n] \quad (24)$$

W correspond à la rotation moyenne de θ par itération (la mesure de la phase est évidemment dans ce cas cumulative). En absence de couplage ($g(\theta_n) = 0$), $W = \Omega$. Avec les itérations, θ_n converge vers une série périodique, si W est un rationnel, quasipériodique si W est un irrationnel. W dépend des paramètres K et Ω . Le diagramme des "langues d'Arnold" indique le rapport W qui est obtenu au terme d'un certain nombre d'itérations, en fonction des valeurs de K et Ω . La stabilité d'un rapport de fréquence est d'autant plus grande que la langue associée est large. Ce graphique montre que les rapport de faible ordre sont les plus stables. Enfin la stabilité des rapports est lié la force du couplage. Lorsque le couplage est faible, il existe des plages de quasi-périodicité, entre les régions d'entraînement périodique. Par contre à fort couplage ces "langues" occupent tout l'espace (Figure 15).

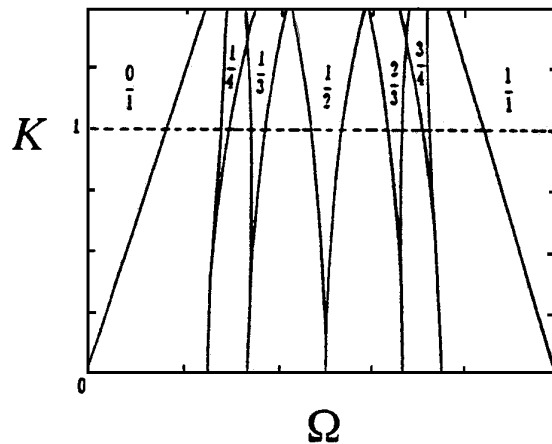


Figure 15: Le diagramme des langues d'Arnold.

Lorsque K est inférieur à 1, les langues sont séparées par des espaces libres correspondant aux rapports irrationnels, débouchant sur un comportement quasi-périodique. Pour une valeur de 1 (niveau critique du rapport), tout l'espace est incorporé dans les langues d'Arnold. Au-delà, des phénomènes de chevauchement se produisent, entraînant des phénomènes de multistabilité, d'hystérésis, et de chaos.

Le couplage est inversement proportionnel à la fréquence d'oscillation. Donc à forte fréquence d'oscillation, K tend à diminuer, et le comportement du système perd de sa stabilité. Le système tend alors à rejoindre un rapport de fréquence d'ordre plus faible, qui présentera une stabilité supérieure.

Entre deux langues P_1/Q_1 et P_2/Q_2 est toujours située une langue P_1+P_2/Q_1+Q_2 , plus étroite que les précédentes. Cette particularité a suggéré de représenter les "filiations" entre rapport par la sommation de Farey.

Soit deux rapports d'ordre n P_1/Q_1 et P_2/Q_2 . Le rapport intermédiaire de plus faible ordre est égal à $(P_1+P_2)/(Q_1+Q_2)$. L'ordre de ce rapport médian est supérieur à n . L'application systématique de ce théorème, à partir des rapports les plus simples 1:0 et 1:1, permet la construction de l'arbre de Farey. Le niveau 0 est défini par $1:0 \oplus 1:1 = 1:2$. Au niveau n , 2^n éléments sont présents. Deux rapports adjacents (c'est-à-dire un rapport et un de ses parents directs) sont liés de manière unimodulaire: c'est-à-dire que $|pq' - p'q| = 1$.

Cet arbre est un inventaire des solutions de la circle map (Figure 16). Il permet de prédire les chemins de transition que la coordination devrait emprunter, à partir d'un rapport de fréquence donné, lorsque le système est déstabilisé. Par exemple un système oscillant selon un rapport 3:8, le chemin de transition logique est 2:5, puis 1:3.

Un rapport est dit symétrique si la somme numérateur + dénominateur est paire, et asymétrique si cette somme est impaire. A chaque niveau, on observe une série

SAASAA, de gauche à droite. D'une manière générale, les modes symétriques bifurquent vers le mode asymétrique adjacent de plus faible ordre.

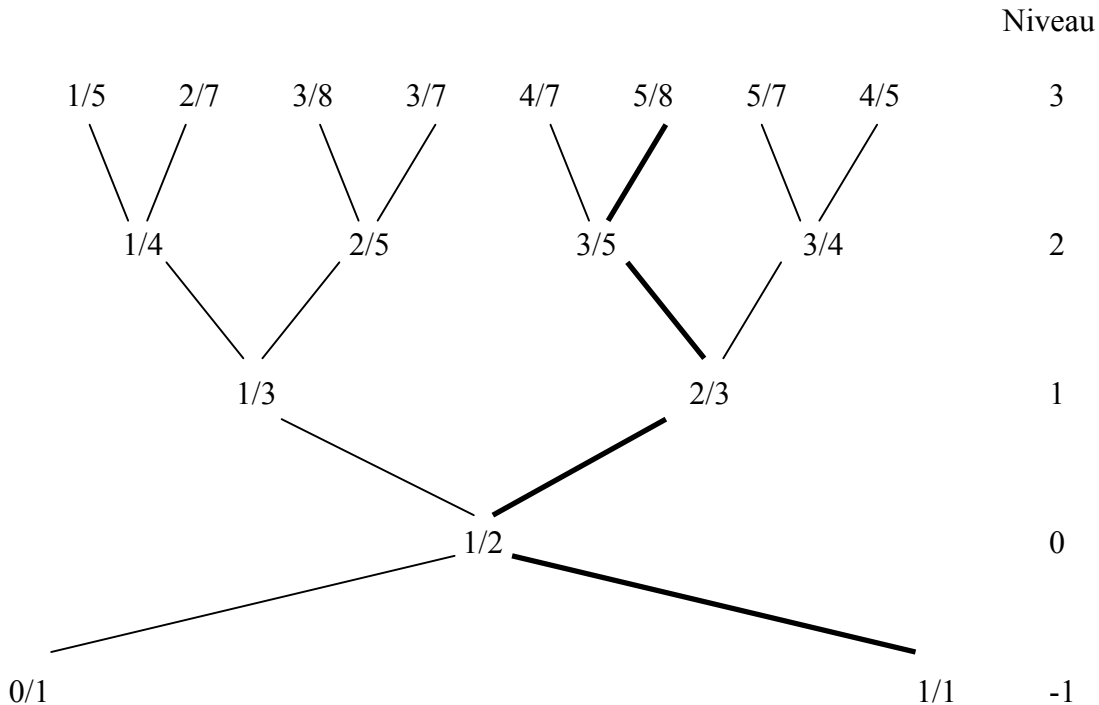


Figure 16: L'arbre de Farey. La série de Fibonacci est en gras.

Le chemin 1:1, 1:2, 2:3, 3:5, 5:8 représente la série des rapports de Fibonacci, basée sur la série de Fibonacci dans laquelle chaque nombre est la somme des deux précédents (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,..). Les rapports de Fibonacci sont les plus fréquents dans la nature, et apparaissent comme les plus stables. Les rapports de cette série donnent la meilleure estimation en nombres rationnels du nombre d'or $((\sqrt{5}-1)/2)$. D'une manière générale, la partie droite de l'arbre est davantage exploitée, sans doute parce que la primitive 1:1 est une caractéristique fondamentale du vivant.

L'étendue 0-1 peut être divisée en intervalles dit de Farey. Soient trois rapports adjacents p/q , p''/q'' et p'/q' .

$$I_{p'',q''} = (p''+p/q''+q; p''+p'/q''+q')$$

Les intervalles de Farey ne se superposent pas, mais occupent tout l'espace. Si l'on définit les intervalles pour un ordre n , il n'y a pas d'intervalles pour les ordres supérieurs à n . Enfin la grandeur des intervalles est d'autant plus importante que les rapports sont de faible ordre.

Références:

- Beek, P.J. & Beek, W.J. (1988). Tools for constructing dynamical models of rhythmic movement. *Human Movement Science*, 7, 301-342.
- Beek, P.J., Peper, C.E. & Stegeman, D.F. (1995). Dynamical Models of Movement Coordination. *Human Movement Science*, 14, 573-608.
- Beek, P.J., Peper, C.E. & van Wieringen, P.C.W. (1992). Frequency locking, frequency modulation, and bifurcations in dynamic movement systems. In G.E. Stelmach & J. Requin (Eds.), *Tutorials in Motor Behavior II* (pp. 599-622). Amsterdam: Elsevier Science Publishers.
- Beek, P.J., Rikkert, W.E.I. and van Wieringen, P.C.W., 1996. Limit cycle properties of rhythmic forearm movement. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance* 22, 1077-1093.
- Beek, P.J., Schmidt, R.C., Morris, A.W., Sin, M.Y. and Turvey, M.T., 1995. Linear and nonlinear stiffness and friction in biological rhythmic movements. *Biological Cybernetics* 73, 499-507.
- Beuter, A. & Lefebvre, R. (1988). Un modèle théorique de transition de phase dans la locomotion humaine. *Canadian Journal of Sport Science*, 13, 247-253.
- Cordier, P., Dietrich, G. & Pailhous, J. (1996). Harmonic analysis of a complex motor behavior. *Human Movement Science*, 15, 789-807.
- Delignières, D., Nourrit, D., Sioud, R., Leroyer, P., Zattara, M. & Micallef, J.P. (1998, sous presse). Preferred coordination modes in the first steps of the learning of a complex gymnastics skill. *Human Movement Science*.
- Deneubourg, J.L. (1977). Application de l'ordre par fluctuation à la description de certaines étapes de la construction du nid chez les termites. *Insectes Sociaux*, 24, 117-130.
- Gibson, J.J. (1979) *The ecological approach to visual perception*. Boston, M.A.: Houghton Mifflin.
- Gleick, J. (1991). *La théorie du Chaos*. Paris: Flammarion.
- Haken, H., Kelso, J.A.S. & Bunz, H. (1985). A theoretical model of phase transition in human hand movement. *Biological Cybernetics*, 51, 347-356.
- Holt, K.G., Jeng, S.F., Ratcliffe, R. & Hamill, J. (1995). Energetic cost and stability during human walking at the preferred stride frequency. *Journal of Motor Behavior*, 27, 164-178.
- Kelso, J.A.S. & Jeka, J.J. (1992). Symmetry breaking dynamics of multilimb coordination. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 18, 645-668.
- Kelso, J.A.S. & Schönner, G. (1988). Self-organization of coordinative movement patterns. *Human Movement Science*, 7, 27-46.

- Kelso, J.A.S. , Holt, K.G., Rubin, P. & Kugler, P.N. (1981). Patterns of Human Interlimb Coordination Emerge from the Properties of Non-Linear, Limit Cycle Oscillatory Processes: Theory and Data. *Journal of Motor Behavior*, 13, 226-261.
- Kelso, J.A.S., Ding, M. & Schöner, G. (1993). Dynamic pattern formation: A primer. In L.B. Smith & E. Thelen (Eds.), *A dynamic systems approach to development* (pp. 13-50). Cambridge, MA: MIT Press.
- Kugler, P.N. & Turvey, M.T. (1987). *Information, natural law, and the self-assembly of rhythmic movement*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Lintern, G. & Kugler, P.N. (1991). Self-organisation in connectionist models: Associative memory, dissipative structures, and thermodynamic law. *Human Movement Science*, 10, 447-483.
- Mottet, D. and Bootsma, R.J. (in press). The dynamics of goal-directed rhythmical aiming. *Biological Cybernetics*.
- Peper, C.E., Beek, P.J. & van Wieringen, P.C.W. (1991). Bifurcations in polyrhythmic tapping: in search of Farey principles. In J. Requin & G.E. Stelmach (Eds.), *Tutorials in Motor Neurosciences* (pp. 413-431). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Peper, C.L., Beek, P.J. & van Wieringen, P.C.W. (1995). Frequency-induced phase transitions in bimanual tapping. *Biological Cybernetics*, 73, 301-309.
- Scholz, J.P. & Kelso, J.A.S. (1990). Intentional switching between patterns of bimanual coordination depends on the intrinsic dynamics of the patterns. *Journal of Motor Behavior*, 22, 98-124.
- Schöner, G. (1990). A dynamic theory of coordination of discrete movement. *Biological Cybernetics*, 63, 257-270.
- Schöner, G., Haken, H. & Kelso, J.A.S. (1986). A stochastic theory of phase transition in human hand movement. *Biological Cybernetics*, 53, 247-257.
- Schöner, G., Jiang, W.Y. & Kelso, J.A.S. (1990). A synergetic theory of quadrupedal gait and gait transition. *Journal of Theoretical Biology*, 142, 359-391.
- Swinnen, S.P.; Dounskaia, N., Walter, C.B. & Serrien, D.J (1997). Preferred and induced coordinations modes during the acquisition of bimanual movement with a 2:1 frequency ratio. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 23, 1087-1110.
- Thelen, E. & Smith, L.B. (1994). *A dynamic systems approach to the development of cognition and action*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Vallacher, R.R. & Nowak, A. (1997). The emergence of Dynamical Social Psychology. *Psychological Inquiry*, 8, 73-99.
- Vereijken, B. (1991). *The dynamics of skill acquisition*. Amsterdam: Free University of Amsterdam.
- Zanone, P.G. & Kelso, J.A.S. (1992). Evolution of Behavioral Attractors with Learning: Nonequilibrium Phase Transitions. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 18, 403-421.