

L'ANALYSE DES PROCESSUS STOCHASTIQUES

Didier Delignières

EA 2991 "Sport, Performance, Santé", Université Montpellier I

Janvier 2001

1. Les processus stochastiques

On parle de processus stochastique lorsque l'évolution d'une variable dans le temps est imprévisible. C'est-à-dire qu'il est impossible, connaissant la position de la variable au temps t , de prédire avec exactitude sa position au temps $t + \Delta t$. Un processus non stochastique est dit déterminé. C'est-à-dire que l'on peut en rendre compte au moyen d'une fonction du temps $[x=f(t)]$ capturant l'ensemble de la variance de la série. Un processus stochastique comprend généralement une partie déterministe, auquel s'ajoute une partie stochastique également appelée bruit. C'est le cas par exemple des équations classiques décrivant la dynamique de la phase relative dans les systèmes d'oscillateurs bimanuels couplés :

$$\dot{\phi} = - \frac{dV(\phi)}{d\phi} + \sqrt{Q} \xi(t)$$

dans laquelle $\xi(t)$ représente une fonction aléatoire, de moyenne 0 et d'écart-type 1, et Q l'intensité de ce bruit.

Un processus stochastique peut être stationnaire ou non stationnaire. Une série est stationnaire si la moyenne, l'écart-type et les moments d'ordre supérieur, ainsi que les fonctions de corrélation demeurent invariants malgré les translations temporelles. Les séries ne remplissant pas ces conditions sont non-stationnaires. Un exemple typique de processus stationnaire est représenté par les états d'équilibre, ou *steady states*. La variable semble alors osciller de manière aléatoire autour d'une valeur moyenne, qui reste constante au cours du temps. On peut citer à ce niveau les séries mesurant l'intervalle inter-battement cardiaque au repos, la durée des foulées successives dans la locomotion, etc... Les séries non stationnaires présentent au contraire des dérives plus ou moins marquées au cours du temps.

L'imprévisibilité des processus stochastiques ne signifie cependant pas qu'ils soient complètement aléatoires (c'est-à-dire que l'accroissement au cours d'un intervalle donné soit rigoureusement indépendant des accroissements passés). L'analyse des processus stochastiques vise à montrer que des séries d'apparence chaotiques comprennent de l'ordre, un ordre moins évident que dans une série déterminée par une équation simple, mais cependant formalisable mathématiquement.

2. Bruit blanc, mouvement brownien et mouvement brownien fractionnaire.

On appelle bruit toute variation imprévisible d'une quantité dans le temps. Le *bruit blanc* est le plus aléatoire des bruits. Dans ce cas, il n'existe aucune corrélation entre les accroissements successifs de la quantité. La fonction d'auto-corrélation est donc nulle ($C(\tau)=0$), et la densité spectrale est équivalente quelle que soit la fréquence (ce qui est une caractéristique de la lumière blanche, d'où le nom attribué à ce type de distribution). Le bruit blanc a une distribution gaussienne, et une moyenne nulle. La figure 1 montre une série temporelle caractéristique du bruit blanc.

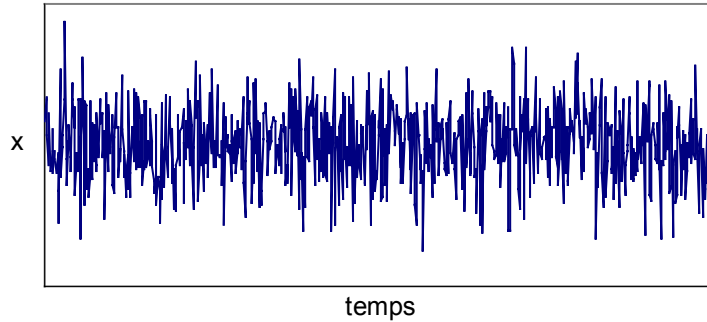


Figure 1 : Série temporelle d'un processus de bruit blanc.

Le *mouvement brownien* est l'intégration d'un bruit blanc. On parle également de *marche au hasard biaisée (biased random walk)*. Un tel processus est représenté en figure 2. En une dimension, il représente par exemple le mouvement d'une particule le long d'une ligne sous l'effet de chocs de direction et d'intensité aléatoires.

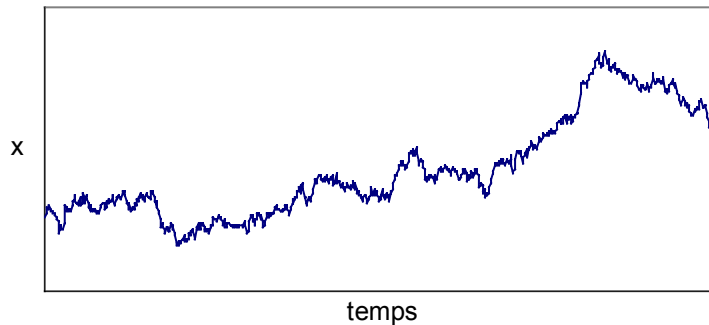


Figure 2 : Série temporelle d'un processus de mouvement brownien.

Soit $x(t)$ la position de la particule au temps t

$$x(t) = x(t-1) + \Delta x(t),$$

les accroissements $\Delta x(t)$ suivant une distribution à bruit blanc. Einstein (1905) a montré que dans le cas d'un mouvement brownien, la variance des accroissements est proportionnelle à l'intervalle de temps considéré. Les accroissements étant de moyenne nulle, cette variance correspond à l'espérance mathématique du carré des accroissements :

$$\begin{aligned} \text{Var}(\Delta x) &= E((\Delta x - E(\Delta x))^2) \\ &= E(\Delta x^2) - E(\Delta x)^2 \\ &= E(\Delta x^2) \end{aligned}$$

Cette espérance mathématique peut être estimée par la moyenne calculée sur un intervalle considéré, $\langle \Delta x^2 \rangle$. La relation d'Einstein prend la forme suivante :

$$\text{Var}(\Delta x) = \langle \Delta x^2 \rangle = 2D\Delta t$$

où le paramètre D est le coefficient de diffusion. Le coefficient de diffusion est une mesure moyenne de l'activité stochastique, c'est-à-dire qu'il est lié à l'amplitude et à la fréquence des chocs. La relation ci-dessus est aisément extensible aux mouvements brownien bi- ou tridimensionnels.

Le terme de *mouvement brownien fractionnaire* a été introduit par Mandelbrot et van Ness (1968), et constitue une généralisation du mouvement brownien. Pour cette famille de processus, la relation d'Einstein est généralisée sous la loi d'échelle suivante:

$$Var(\Delta x) = \langle \Delta x^2 \rangle \propto \Delta t^{2H}$$

Ou encore

$$\sigma_{\Delta x} = \propto \Delta t^H$$

dans laquelle H peut être n'importe quel réel compris entre 0 et 1. Pour un mouvement classique brownien, $H=0.5$, et l'on retrouve la relation linéaire d'Einstein.

3. Les corrélations à long terme

Le mouvement brownien fractionnaire est caractérisé par la présence de corrélations à long terme, lorsque H est différent de 0.5. Un exposant supérieur à 0.5 révèle des phénomènes de persistance, c'est-à-dire que l'évolution de la série tend à suivre des tendances. Si la série a augmenté précédemment, la probabilité est forte qu'il continue à le faire. Les séries persistantes ont une mémoire à long terme, c'est-à-dire qu'il existe une corrélation à long terme entre les événements actuels et les événements futurs. Chaque observation porte la mémoire des événements qui l'ont précédé.

A l'inverse, un exposant inférieur à 0.5 révèle un phénomène d'anti-persistance. Dans ce cas les accroissements successifs tendent à être négativement corrélés. Une augmentation de la variable tend à être suivi d'une diminution, et vice-versa. La figure 3 illustre les séries temporelles caractéristiques des processus persistants (à gauche) et anti-persistant (à droite).

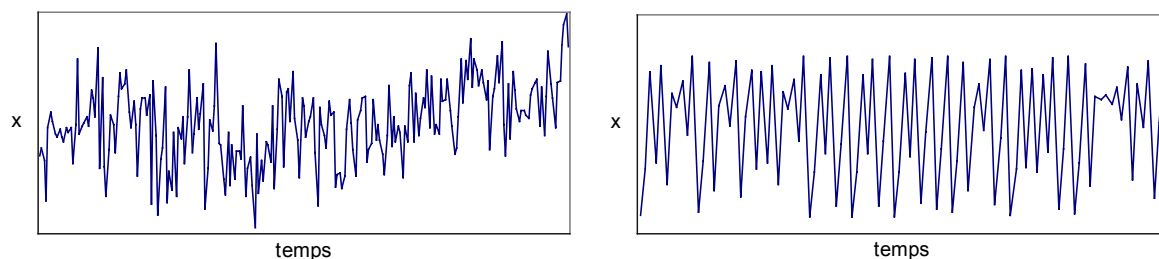


Figure 3 : Exemples de processus stochastiques persistant (à gauche: évolution des températures moyennes annuelles à Genève de 1755 à 1993) et anti-persistant (à droite: fonction logistique, $x=4t(1-t)$).

Une série présentant des corrélations à long terme est définie comme une série présentant une fonction d'auto-corrélation possédant une propriété très précise: $C(\tau) \approx \tau^{-\gamma}$, avec $0 < \gamma < 1$. En d'autre terme la fonction d'auto-corrélation suit une loi puissance. Ceci implique que dans le domaine fréquentiel, on a également une loi puissance $1/f^\beta$ ($\beta = 1 - \gamma$).

4. L'auto-similarité

Le mouvement brownien fractionnaire a également un caractère fractal, révélé par des phénomènes d'auto-similarité ou d'invariance d'échelle. L'auto-similarité d'un objet fractal renvoie au fait que l'objet peut être décomposé en sous-unités, puis en sous-sous unités, qui possèdent les mêmes propriétés statistiques que l'objet global. Quelle que soit l'échelle d'observation, on observe donc des caractéristiques identiques. Pour mettre en évidence l'auto-similarité d'une courbe représentée en deux dimensions, on sélectionne un segment de la courbe, et on applique aux deux échelles un facteur identique d'amplification. Les propriétés statistiques de la courbe ré-étalonnée doivent être similaires à celles de la courbe d'origine.

Ce concept de structure fractale peut être étendu aux séries temporelles. L'auto-similarité signifie alors qu'en moyenne, les fluctuations sur une échelle de temps sont similaires aux fluctuations sur d'autres échelles de temps. Cette extension pose cependant problème. Si une série temporelle est classiquement représentée sur un plan en deux dimensions, ces deux dimensions renvoient à des grandeurs physiques différentes (le temps en abscisse, la variable évoluant dans le temps en ordonnée). On aura donc besoin de deux facteurs d'amplification distincts (un pour le temps, et l'autre pour la variable).

En termes mathématiques, une série temporelle sera auto-similaire si :

$$y(t) \stackrel{d}{=} a^\alpha y\left(\frac{t}{a}\right)$$

$\stackrel{d}{=}$ signifie que les propriétés statistiques des deux côtés de l'équation sont identiques. En d'autres termes, un processus auto-similaire $y(t)$, avec un paramètre α a une probabilité de

distribution identique à un processus ré-étalonné de manière adéquate, $a^\alpha y(t/a)$, c'est-à-dire une série temporelle qui a été ré-étalonnée sur l'axe des x par un facteur a ($t \rightarrow t/a$), et sur l'axe des y par un facteur a^α ($y \rightarrow a^\alpha y$). L'exposant α est appelé paramètre d'auto-similarité.

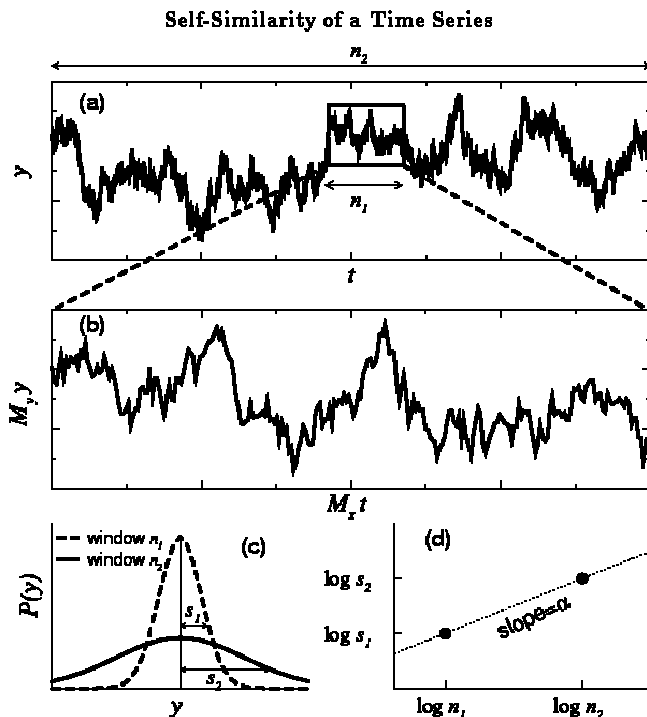


Figure 4 : Phénomène d'auto-similarité dans une série temporelle.

En pratique, il est impossible de déterminer si deux processus sont statistiquement identiques, car ce critère nécessite qu'ils aient des fonctions de distribution identiques (comprenant la moyenne, la variance, mais également tous les moments d'ordres plus élevés). On approche généralement cette équivalence par un critère plus souple en n'examinant que les deux premiers moments (moyenne et variance). La figure 4 illustre cette démarche, dans le cadre d'une série temporelle.

Soit M_x le facteur d'amplification appliqué au temps et M_y le facteur appliqué à la variable. Le paramètre d'auto-similarité peut être calculé par la simple relation :

$$\alpha = \frac{\ln M_y}{\ln M_x}$$

M_x peut être calculé en faisant le rapport des tailles de la série initiale et de la série extraite ($M_x = n_2/n_1$). Une estimation de M_y peut être réalisée par le rapport des écarts types des deux distributions ($M_y = s_2/s_1$). On obtient donc :

$$\alpha = \frac{\ln M_y}{\ln M_x} = \frac{\ln s_2 - \ln s_1}{\ln n_2 - \ln n_1}$$

Cette relation est simplement la pente de la droite joignant les deux points (n_1, s_1) et (n_2, s_2) sur un graphe log-log.

Un certain nombre d'auteurs ont proposé des méthodes d'analyse des processus stochastiques, exploitant les principes décrits précédemment. Les plus fréquemment utilisées sont la *Rescaled Range Analysis*, La *Detrended Fluctuation Analysis*, et la *Power Spectral Analysis*.

5. L'analyse des étendues normalisées (Rescaled Range Analysis)

Hurst (1965) a proposé une méthode appelée analyse des étendues normalisées, ou *Rescaled Range Analysis (R/S Analysis)*. Notons que l'objectif initial de l'auteur était de modéliser la série temporelle de la hauteur des crues du Nil, de l'antiquité à nos jours. Selon cette méthode, une série chaotique peut être caractérisée par un exposant (noté H), qui représente la probabilité pour qu'un événement soit suivi par un événement similaire. C'est donc les aspects de persistance qui sont principalement visés par cette analyse. Le mode de calcul de l'exposant de Hurst n'est pas encore fixé, et certaines différences peuvent apparaître en fonction des détails des algorithmes utilisés. Nous exposons ici la méthode originale de l'auteur.

La méthode consiste à estimer, pour un intervalle d'effectif donné, le rapport entre l'étendue R de la série centrée et intégrée, et l'écart-type S de la série originale. En d'autres termes, la série est considérée comme la "cause" générant le déplacement d'une particule (dont rend compte la série centrée et intégrée). On s'intéresse à la différence entre les limites minimale et maximale du déplacement, dans un certain intervalle temporel, normalisé par l'écart-type de la cause ayant généré le déplacement. Dans la logique de l'équation proposée par Einstein, l'exposant de Hurst rend compte de la relation liant R/S à la taille de l'échantillon.

Soit une série temporelle de N nombres, notés $x(t)$. La méthode préconisée par Hurst consiste à prendre en considération une série de subdivisions indépendantes, d'effectif τ . Pratiquement, on part de séries d'effectif 10, puis 11, 12, 13, jusqu'à l'effectif le plus élevé permettant de distinguer deux subdivisions ($N/2$ ou $(N/2)-1$). Pour chaque subdivision considérée, la moyenne des τ données est

$$\langle x \rangle_\tau = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} x(t)$$

Pour chaque subdivision, on centralise les données, en leur soustrayant la moyenne locale. Puis on établit une série de valeurs cumulées à l'intérieur de chaque période : on ajoute à chaque donnée la somme des valeurs centrées qui la précèdent:

$$X(t, \tau) = \sum_{u=1}^t \{x(u) - \langle x \rangle_\tau\}$$

Donc pour chaque valeur de t ($1 \leq t \leq \tau$), on a une valeur de $X(t, \tau)$. $X(t, \tau)$ est une distribution intégrée. On peut noter que si le signal original est un bruit blanc, $X(t, \tau)$ est un mouvement brownien. L'étendue R (*range*) est la différence entre le minimum et le maximum de $X(t, \tau)$

$$R = \max_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau) - \min_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau)$$

Cette étendue est ensuite normalisée au moyen d'une division par l'écart-type local ($S(t, \tau)$). Enfin on procède au moyennage, par niveau d'effectif, des étendues normalisées R/S . Hurst montre que l'étendue normalisée R/S , où S représente l'écart type de la série des $x(t)$ est liée à la grandeur de l'intervalle considéré par la relation suivante:

$$R/S = (a\tau)^H$$

Où a est une constante et H est l'exposant de Hurst. H peut être estimé par la méthode des moindres carrés, ou par l'estimation de la pente de la régression log/log de R/S sur τ . Expérimentalement, R/S doit être calculé pour un ensemble de valeurs de τ . Pour une variable aléatoire (bruit blanc), $H=0.5$, c'est-à-dire:

$$a\tau = (R/S)^2.$$

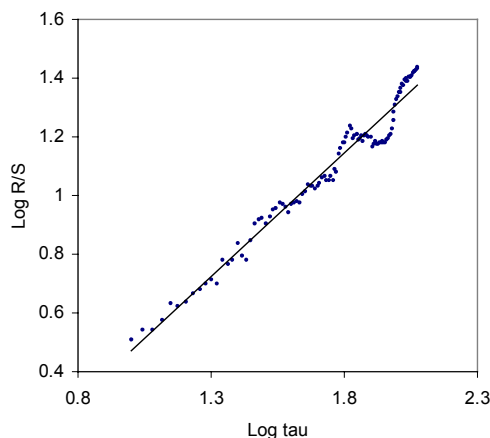


Figure 4: Estimation graphique de l'exposant de Hurst.

La significativité de la différence entre l'attente aléatoire et la mesure obtenue peut être évaluée par les tests classiques de significativité des pentes de régression¹.

D'une manière générale l'exposant de Hurst est compris entre 0 et 1. Un exposant supérieur à 0.5 révèle des phénomènes de persistance: le « bruit » n'est pas aléatoire, et la variable est sensible à son histoire. On est en face d'un mouvement brownien fractionnaire, et la force du phénomène de persistance croît lorsque H approche de 1. A l'inverse un exposant inférieur à 0.5 révèle un phénomène d'anti-persistance.

¹ $t = \text{abs}[(H-0.5)/SE]$, avec $SE = (1-r^2)0.5/(N^{0.5} * \text{sd}x * \text{sd}y)$

SE représente l'erreur-type, r est la corrélation entre x et y , et $\text{sd}x$ et $\text{sd}y$ les écart-types de x et y .

La dimension fractale de la série peut être dérivée simplement, grâce à l'équation :

$$D = 2-H$$

Pour un processus de mouvement brownien fractionnaire ($0.5 < H < 1$), la dimension fractale est logiquement comprise entre 1 et 2.

Enfin lorsque H est différent de 0.5 la distribution de probabilité n'est pas normalement distribuées, et Feder (1988) a proposé de calculer à partir de l'exposant de Hurst la corrélation C entre les accroissements futurs et les accroissements passés.

$$C = 2(2^{2H-1} - 1)$$

On peut noter que cette corrélation est nulle pour un processus de bruit blanc. C est un indicateur de la dépendance des valeurs de la série à l'histoire. A noter que cette corrélation C n'est pas liée à la fonction d'auto-corrélation (ACF). La fonction d'auto-corrélation est intéressante pour déterminer les dépendances à court terme dans les séries temporelles (voir à ce niveau les procédures ARIMA), mais tend à sous-estimer les corrélations à long terme (Mandelbrot, 1972).

L'analyse de Hurst est délicate pour les séries brèves. Des fluctuations importantes peuvent être obtenues avec des séries de moins de 500 données. Ceci explique pourquoi les subdivision les plus faibles utilisées ne sont pas inférieures à 10. Enfin l'exposant de Hurst est sensible à la taille de l'échantillon. Ainsi, De la Fuente *et al.* (1998) montrent que l'exposant obtenu pour la composante x de l'attracteur de Lorenz est égale à 0.82 pour 5000 données, et 0.62 pour 40000. Par contre, pour un intervalle de temps donné, l'exposant de Hurst ne dépend pas de la fréquence d'échantillonnage (De la Fuente *et al.*, 1998).

6. L'analyse des fluctuations redressées (Detrended Fluctuation Analysis).

L'analyse des fluctuations redressées (DFA) cherche à mettre en évidence les processus d'auto-similarité dans les séries temporelle. Elle utilise la démarche illustrée dans la figure 4, qui est répétée un grand nombre de fois, sur un ensemble de fenêtres indépendantes et de tailles diverses. Les écarts types obtenus pour des fenêtres de tailles identiques sont moyennés, et l'exposant α est estimé à partir du graphe log-log de s sur n , en prenant en compte toutes les tailles d'échantillon analysées.

Le traitement de données expérimentales, et notamment physiologiques, pose cependant deux types de problèmes, que la méthode DFA tente de contourner. Le premier est celui du bornage de séries physiologiques dans des limites "normales", le second est celui de la non-stationarité.

Pour un processus auto-similaire avec un $\alpha > 0$, l'écart-type croît avec la taille de la fenêtre selon une loi puissance. De ce fait la série n'est pas bornée. Cependant, la plupart des séries temporelles physiologiques ne possèdent pas cette particularité : l'étendue de la variable est bornée dans des limites, qui ne changent pas en fonction de la taille de la fenêtre d'observation (Hausdorff, Purdon, Peng, Ladin, Wei & Glodberger, 1996). De ce fait, on n'a pas besoin d'utiliser de facteur d'amplification ($M_y = 1$) pour mettre en évidence l'auto-similarité. Dans ce cas on obtient donc un α égal à 0, ce qui correspond au paramètre

caractéristique des processus à bruit blanc. On contourne ce problème en appliquant l'analyse non pas sur la série originale, mais sur la série intégrée.

Un autre problème est que les séries physiologiques sont en général non stationnaires. Une série est stationnaire si la moyenne, l'écart-type et les moments d'ordre supérieur, ainsi que les fonctions de corrélation demeurent invariants malgré les translations temporelles. Les signaux ne remplissant pas ces conditions sont non-stationnaires, et la procédure d'intégration tend à exagérer cette non-stationnarité. La DFA tente de contourner ce problème, en redressant les données à l'intérieur de chaque fenêtre analysée.

Dans une première étape, la série originale $x(i)$ est intégrée. Pour cela on remplace chaque donnée par la somme cumulée des écarts à la moyenne :

$$y(k) = \sum_{i=1}^k [x(i) - \bar{x}]$$

On peut noter que si la série originale constitue un bruit blanc, la série intégrée sera un mouvement brownien. La série intégrée est ensuite divisée en fenêtres indépendantes de longueur équivalente n . Dans chaque fenêtre de longueur n , une droite des moindres carrés est estimée, représentant la tendance de cette fenêtre. On note $y_n(k)$ les coordonnées y sur ces droites. La série intégrée est ensuite redressée en retranchant la tendance locale, dans chaque fenêtre ($y(k) - y_n(k)$). L'analyse porte donc sur les résidus de la régression. Pour une longueur de fenêtre donnée, la grandeur caractéristique des fluctuations pour cette série intégrée et redressée est :

$$F(n) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [y(k) - y_n(k)]^2}$$

$F(n)$ peut être considéré comme un écart-type, calculé par rapport à la moyenne redressée. Ce calcul est répété pour toutes les tailles de fenêtre pour produire une relation entre n et $F(n)$. De manière typique, $F(n)$ croît avec n . Une relation linéaire, sur un graphe log-log révèle la présence d'auto-similarité. La pente de la droite correspond au paramètre α , qui peut être considéré comme une estimation de l'exposant H de l'équation de Mandelbrot et van Ness (1968).

Le paramètre α d'une série temporelle intégrée est lié à la fonction d'auto-corrélation $C(\tau)$ de la série originale. Pour un processus à bruit blanc, la valeur à l'instant t est non-corrélée avec les valeurs précédentes. La série intégrée correspond à une marche aléatoire (*random walk*), et donc $\alpha=0.5$. La fonction d'auto-corrélation est égale à 0 pour chaque décalage τ différent de 0.

On peut noter que de nombreux phénomènes naturels sont caractérisés par de fortes auto-corrélations sur une échelle de temps caractéristique τ_0 , et une fonction d'auto-corrélation qui décroît ensuite de manière exponentielle [$C(\tau) \approx \exp(-\tau/\tau_0)$]. La pente initiale de la droite $\log F(n)$ vs $\log n$ peut être différente de 0.5, mais approche 0.5 pour les tailles élevées de fenêtre. Ces processus sont caractéristiques des processus auto-régressifs et de moyenne mobile mis en évidence dans les procédures ARIMA.

Un α supérieur à 0.5 et inférieur ou égal à 1 révèle des auto-corrélations plus persistantes, décroissant selon une loi puissance [$C(\tau) \approx \tau^{-\gamma}$]. La relation entre α et γ est $\gamma = 2 -$

2α . Le cas $\alpha=1$ est spécial et correspond à un bruit $1/f$ (*1/F noise*, voir plus bas), ou bruit rose² (*pink noise*).

Lorsque $\alpha>1$, les corrélations existent mais ne suivent plus une loi puissance. $\alpha=1.5$ indique que la série originale est un mouvement brownien (une intégration de bruit blanc), appelé encore bruit brun (*brown noise*).

Enfin lorsque $0<\alpha<0.5$, des anti-corrélations, décroissant selon une loi puissance sont présentes, indiquant que des valeurs élevées sont suivies de valeurs faibles, et vice-versa.

L'exposant α peut également être vu comme un indicateur de la « rugosité » de la série originale. Plus α est grand, plus la série originale est lisse. Dans ce contexte, le bruit $1/f$ peut être interprété comme un compromis entre l'imprédictibilité du bruit blanc et le paysage plus lissé du bruit brownien.

7. L'analyse spectrale

Une troisième méthode pour analyser ces processus stochastiques consiste à s'intéresser au spectre de puissance de la série. Ce spectre, ou périodogramme, est obtenu par une analyse de Fourier. Histogramme avec les fréquences f en abscisse, et le carré des amplitudes correspondantes, notées $S(f)$, en ordonnées. La relation de Mandelbrot et van Ness (1962) peut être exprimée sous la forme:

$$S(f) \propto 1/f^\beta$$

On détermine l'exposant β de la pente de la droite ajustant la relation entre $\text{Log}_{10}f$ et $\text{Log}_{10}S(f)$ (figure 5).

$$\text{Log}_{10}S(f) \propto \text{Log}_{10}f^{-\beta}$$

Pour un processus de bruit blanc, β est égal à 0. Un mouvement brownien est caractérisé par un exposant β égal à 2. Enfin, l'exposant $\beta=1$ correspond au cas particulier où $S(f)$ est proportionnel à $1/f$. Il s'agit du bruit rose, ou bruit $1/f$.

L'exposant β est lui aussi lié à la fonction d'auto-corrélation, car le spectre de puissance est simplement la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation. Si $[C(\tau) \approx \tau^\gamma]$ (cas des mouvements fractionnaires browniens), alors $\beta = 1 - \gamma$. On peut en dériver une relation directe entre β et α : $\beta = 2\alpha - 1$. La DFA est cependant plus adaptée aux séries non stationnaires, car l'analyse de Fourier requiert un minimum de stationnarité.

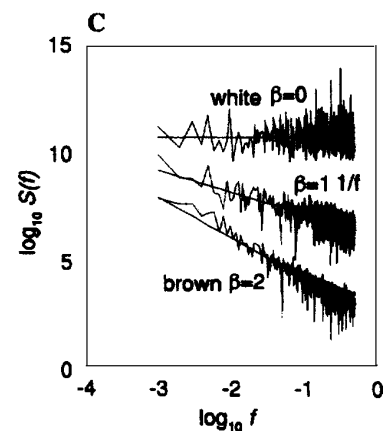


Figure 5: Estimation de l'exposant β (d'après Hausdorff et al., 1996)

² Dans certaines publications en économétrie, utilisant la R/S analysis, le bruit rose est caractérisé comme série anti-persistante ($H<0.5$), et l'on parle de bruit noir pour une série persistante ($H>0.5$). Ceci vient du fait que les économistes travaillent généralement sur des séries de changements que sur des séries brutes, c'est-à-dire sur des séries différenciées. Comme le bruit blanc est le signal différencié du bruit brun (mouvement brownien), la différenciation d'un bruit $1/f$ donne une série anti-persistante. La nomenclature utilisée par les utilisateurs de la DFA vient du fait qu'ils travaillent généralement sur des séries brutes. Voir notamment les sites <http://www.panagora.com/glossary.htm>, et http://www.dsmcl.net/site/esoterica/vanderbilt_fmh/RSanalysis.html.

8. Fractalité et systèmes dynamiques

Quelques travaux ont appliqué les méthodes précédemment évoquées à l'étude de séries temporelles biologiques. Peng et al. (1993) montrent que le rythme cardiaque ne peut être considéré comme un rythme sinusoïdal régulier. Chez des patients sains, la DFA révèle des coefficients α proche de 1, révélant un processus fractionnaire brownien de type bruit rose. Par contre on retrouve chez des patients souffrant d'insuffisance cardiaque congestive des exposants proche de 1.3 (c'est-à-dire voisins du mouvement brownien). Cette différence suggère une altération des corrélations à long terme. Des analyses similaires ont été réalisées chez des sujets âgés (68-81 ans), et sains. Ce travail révèle deux comportements différents suivant que l'analyse porte sur le court ou le long terme. A court terme, la série se comporte comme un bruit brownien ($\alpha=1.5$), alors que sur le long terme elle peut être assimilée à un bruit blanc ($\alpha=0.5$). Les auteurs montrent en outre l'intérêt prédictif de la DFA, dans une perspective clinique (voir aussi Absil *et al.*, 1999).

Hausdorff et al. (1996) analysent des séries de durée de pas lors de la marche. Ils mettent en évidence le caractère fractal de la durée du pas, chez des sujets sains marchant à allure normale, avec un exposant α de 0.83. Par ailleurs, ce caractère fractal n'est pas altéré si l'on impose des vitesses lentes ou a contrario élevées. Cependant, ce caractère fractal disparaît si l'on impose une fréquence par un métronome auditif (l'exposant est alors proche de 0.5). Un autre travail compare les séries temporelles obtenues avec des sujets jeunes et des sujets âgés. Le caractère fractal de la série est confirmé chez les sujets jeunes ($\alpha=1.04$), mais la série semble plus aléatoire chez les sujets âgés ($\alpha=0.56$). Ces différences, qui ne sont pas détectables en termes de moyenne et d'écart-type, pourraient se révéler cruciales dans l'analyse des causes de chute chez les personnes âgées. On trouve également des séries plus aléatoires chez des patients atteints de maladies neuro-dégénératives telles que les syndromes de Parkinson ou de Huntington. Dans le cas de la maladie de Huntington, le coefficient α est d'autant plus faible que la maladie est sévère, allant jusqu'à des coefficients inférieurs à 0.5, indiquant l'apparition d'un nouveau type de dynamique, anti-persistante. L'ensemble de ces résultats suggère l'importance du système nerveux central dans la génération du caractère fractal de la marche.

Gilden, Thomson et Mallon (1995) mettent en évidence la présence de bruit rose ($1/F$) dans plusieurs expérimentations, dans lesquelles les sujets devaient reproduire après présentation un intervalle de temps ou un intervalle spatial. Selon les auteurs, l'universalité du bruit $1/F$ suggère que les événements ne sont pas la conséquence d'interactions physiques particulières, mais plutôt l'expression de systèmes dynamiques non-linéaires. Yamada (1995) met dans la même logique en évidence le caractère fractal de la production répétée de mouvements du doigt (avec un exposant de Hurst de 0.898).

D'une manière générale, ces travaux montrent que des phénomènes classiquement considérés comme l'expression d'états d'équilibre (c'est-à-dire une fluctuation aléatoire autour d'une valeur moyenne), présentent en fait un caractère fractionnaire brownien. Ces phénomènes présentent un caractère chaotique, c'est-à-dire une évolution imprévisible, quoique se déroulant dans des limites déterminables, et caractérisée par des corrélations à long-terme et de l'auto-similarité. Ce caractère chaotique semble essentiel pour la viabilité du système, et on a pu voir que les altérations du fonctionnement normal débouchaient généralement sur une réduction de la fractalité.

Ces résultats incitent avant tout à modifier le regard que nous portons sur nos objets de recherche, et sur nos conceptions de la causalité. Paradoxalement, les états d'équilibre semblent sous la dépendance de systèmes dynamiques complexes loin de l'équilibre. Selon Bak et Chen (1991), le bruit 1/F et la structure fractale sont les signatures des états critiques auto-organisés. Selon les auteurs, tout système complexe interactif (c'est-à-dire composé de millions d'éléments en interaction à courte portée les uns avec les autres), évolue vers un état critique. Ces états critiques sont caractérisés par une forte non-linéarité, et notamment une disproportion des causes et des conséquences. Un petit événement peut déclencher une réaction en chaîne pouvant conduire à la catastrophe. Le même mécanisme conduit aux événements mineurs et aux catastrophes, et ces systèmes n'atteignent jamais l'état d'équilibre, mais évoluent d'un état métastable vers un autre. L'état critique présente en outre une certaine stabilité, dans la mesure où un système en état sous- ou sur-critique tend à revenir à l'état critique, et dans la mesure où l'état critique résiste à des modifications mineures des contraintes gouvernant le système.

On a longtemps cru que l'étude séparée des différents éléments d'un système et de leurs interactions pouvait permettre de prévoir le comportement global du système, et que la réaction du système était proportionnelle à la perturbation subie. Les caractéristiques globales d'un système en état critique, telles que le nombre relatif d'événements importants et mineurs, ne résultent pas de mécanismes microscopiques et ne peuvent de ce fait être déduites de l'étude séparée des constituants du système. C'est une approche holistique, globale que proposent les auteurs, recherchant les lois macroscopiques sous-tendant la dynamique et surtout le maintien de l'état critique

Références

- Absil, P.A., Sepulche, R., Bilge, A. & Gérard, P. (1999). Non linear analysis of cardiac rhythm fluctuations using DFA method. *Physica A*, 272, 235-244.
- Bak, P. & Chen, K. (1991). Les systèmes critiques auto-organisés. *Pour La Science*, 161, 52-60.
- Collins, J.J. & De Luca, C.D. (1993). Open-loop and closed-loop control of posture: A random-walk analysis of center-of-pressure trajectories. *Experimental Brain Research*, 95, 3.8-318.
- De la Fuente, I.M., Martinez, L., Aguirregabiria, J.M. & Veguillas, J. (1998). R/S analysis in strange attractors. *Fractals*, 6, 95-100.
- Gilden, D.L., Thornton, T. & Mallon, M.W. (1995). 1/F noise in human cognition. *Science*, 267, 1837-1839.
- Hausdorff, J.M., Purdon, P.L., Peng, C.K., Ladin, Z., Wei, J.Y. & Goldberger, A.R. (1996). Fractal dynamics of human gait: stability of long-range correlations in stride interval fluctuation. *Journal of Applied Physiology*, 80, 1448-1457.
- Hurst, H.E. (1965). *Long-term storage: An experimental study*. London: Constable.
- Liebovitch, L.S. & Todorov, A. (1996). Invited editorial on "Fractal dynamics of human gait: stability of long-range correlations in stride interval fluctuation". *Journal of Applied Physiology*, 80, 1446-1447.

Mitra, S., Riley, M.A., & Turvey, M.T. (1997). Chaos in human rhythmic movement. *Journal of Motor Behavior*, 29, 195-198.

Newell, K.M., Slobounov, S.M., Slobounova, E.S. & Molenaar, P.C.M. (1997). Stochastic processes in postural center-of-pressure profiles. *Experimental Brain Research*, 113, 158-164.

Peng C-K, Mietus J, Hausdorff JM, Havlin S, Stanley HE, Goldberger AL. (1993). Long-range anti-correlations and non-Gaussian behavior of the heartbeat. *Physical Review Letter*, 70, 1343-1346.

Yamada, N. (1995). Nature of variability in rhythmical movement. *Human Movement Science*, 14, 371-384.

Sur la Detrended Fluctuation Analysis

<http://reylab.bidmc.harvard.edu/tutorial/DFA/master.html>

<http://hypertextbook.com/chaos/>

Sur la Rescaled Range Analysis

[http://www.physik.tu-](http://www.physik.tu-muenchen.de/lehrstuehle/T32/matpack/html/Mathematics/RSAnalysis.html)

[muenchen.de/lehrstuehle/T32/matpack/html/Mathematics/RSAnalysis.html](http://www.physik.tu-muenchen.de/lehrstuehle/T32/matpack/html/Mathematics/RSAnalysis.html)

<http://www.panagora.com/glossary.htm>

http://www.unil.ch/imm/docs/Notes_de_cours/ia_1/IA_cours_7_1.htm

http://www.dsmcl.net/site/esoterica/vanderbilt_fmh//RSanalysis.html