

# **Les outils méthodologiques de l'analyse cinématique**

D. Delignières  
Université Montpellier I

## **Plan du cours**

1. Le recueil des données cinématiques.
2. Vitesse et accélération
3. Techniques de lissage et de filtrage des données
4. Détermination des coordonnées de points virtuels
5. Calcul des angles articulaires
6. Modélisation des trajectoires
7. Statistiques appliquées aux séries temporelles
8. Les processus de mémoire à long terme
9. Analyse du mouvement dans l'espace des phases
10. Construction de modèles dynamiques à partir des données cinématiques

La cinématique renvoie à la description du mouvement. Elle n'est pas concernée par les forces, internes ou externes à l'organisme, qui sont les causes du mouvement, mais plutôt par les détails du mouvement lui-même. Le mouvement est analysé au travers de l'évolution temporelle de données de position, de vitesse, et d'accélération. Le mouvement peut être analysé soit en tant que mouvement linéaire, soit en tant que rotation, en fonction de la tâche analysée.

Bien que l'on lie souvent cinématique et analyse du mouvement, la cinématique ne renvoie pas exclusivement au mouvement physique. On peut envisager d'une manière plus générale d'appliquer les principes de la cinématique à toute évolution temporelle de grandeurs numériques. Par exemple la cinématique d'une attitude, d'une émotion peut être envisagée, à condition de disposer d'outils de mesure permettant de générer les séries temporelles nécessaires à ce type d'analyses.

## **1. LE RECUEIL DES DONNEES CINEMATQUES.**

### **1.1. Dispositifs d'acquisition**

#### **1.1.1. Les systèmes d'analyse du mouvement.**

Actuellement on peut distinguer trois grandes catégories de systèmes:

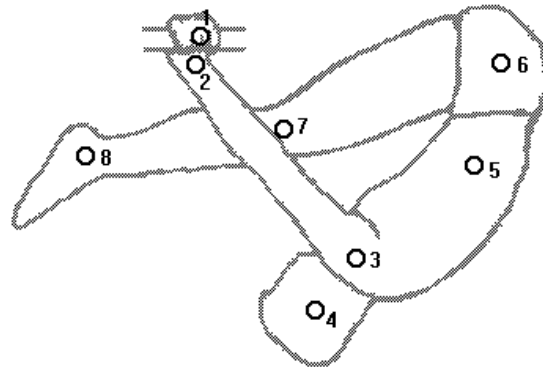
Systemes vidéo: ces systèmes, relativement économiques, permettent de travailler avec des caméras vidéo grand public. (3Dvision)

Systemes optoélectriques: ces systèmes utilisent des diodes luminescentes, placées sur le corps du sujet (Selspot)

Systèmes vidéo automatiques: le sujet est équipé de marqueurs passifs, et est filmé par caméra vidéo infrarouge. (Elite, Vicon)

#### 1.1.1.1. Placement des marqueurs

Les marqueurs sont généralement posés sur les charnières du corps. A noter que les systèmes optoélectriques sont plus contraignants, à cause de l'alimentation nécessaire aux diodes.



#### 1.1.1.2. Placement des caméras

Les systèmes vidéo acceptent de travailler à plus grande distance des sujets que les systèmes optoélectriques. D'un autre côté, les systèmes à caméra infrarouge ne peuvent travailler qu'en intérieur, en lumière relativement tamisée. Par contre, les systèmes vidéo classiques peuvent travailler en extérieur.

Afin de ne pas perdre de marqueurs lors des mouvements de rotation ou lors du passage des segments le long du corps, on a intérêt à multiplier le nombre de caméras. Le principe est que chaque marqueur doit être simultanément vu par au moins deux caméras. Avec uniquement deux caméras, on doit se contenter de mouvements se déroulant essentiellement dans un plan. Le VICON 370 accepte par exemple 7 caméras 100 Hz.

#### 1.1.1.3. Calibration/précision

La qualité de la calibration va déterminer la précision de la mesure. D'une manière générale les systèmes optoélectriques permettent une plus grande précision. Mais en fait la précision dépend de nombreux facteurs (éloignement des caméras, taille du volume de travail, etc..) La précision est meilleure au centre du volume de travail qu'à ses extrémités. La précision requise n'est pas absolue, mais dépend du grain d'analyse, et donc des objectifs de la recherche. Une bonne calibration permet des précisions de l'ordre de 2 à 5 mm, sur des volumes restreints. Pour un sujet en déplacement, sur un volume de plusieurs mètres cube, une précision de l'ordre du centimètre est acceptable. ,

#### 1.1.1.4. Labellisation, reconstruction

La reconnaissance des marqueurs est automatique sur les systèmes récents. Même la labellisation est maintenant réalisée de manière automatique.

### **1.1.1.5. Fréquence d'acquisition.**

Le théorème d'échantillonnage stipule que le signal doit être échantillonné à une fréquence au moins deux fois supérieure à la plus haute fréquence présente dans le signal lui-même. L'utilisation de fréquences trop faibles peut entraîner des erreurs dites d'"aliasing", c'est-à-dire l'apparition de fréquences erronées, non présentes dans le signal original. Carnahan (1994) préconise cependant de monter jusqu'à 10 fois la fréquence du signal.

On réagit souvent en recherchant une fréquence d'oscillation la plus élevée possible. Il est clair cependant que la fréquence d'acquisition coûte cher. Winter (1979) suggère que pour la marche, une fréquence d'acquisition à 25 Hz est suffisante. Il est clair cependant que dans d'autres types d'habiletés (par exemple un swing au golf), une fréquence d'acquisition plus élevée sera nécessaire. Les impacts notamment génèrent des fréquences élevées, et l'on doit alors recourir à des systèmes d'analyse à haute fréquence d'acquisition.

La fréquence d'acquisition optimale dépend également de l'utilisation ultérieure des données: si l'on dérive le signal pour traiter des données d'accélération, la fréquence doit être relativement élevée.

Les caméras vidéo sont généralement limitées à 50 ou 60 Hz. Les caméras à grande vitesse (100 Hz) et plus représentent un surcoût conséquent.

### **1.1.2. Les goniomètres.**

Les goniomètres sont des potentiomètres spécialement affectés à la mesure des angles articulaires. Le goniomètre comprend deux bras: l'un est fixé à l'un des segments de l'articulation, et l'autre au second. Le potentiomètre renvoie un signal électrique proportionnel à la valeur de l'angle entre les deux bras. Le potentiomètre utilisé doit évidemment varier linéairement avec l'angle.

### **1.1.3. Les potentiomètres**

Des potentiomètres peuvent également être placés directement sur des dispositifs manipulés par les sujets. C'est par exemple le cas dans l'étude des coordinations bimanuelles, avec les joysticks ou des pendules dont les axes sont équipés de potentiomètres.

Un potentiomètre a l'avantage d'être peu onéreux, et le bricolage de goniomètre est assez facile à réaliser.

### **1.1.4. Les accéléromètres.**

L'accéléromètre, comme son nom l'indique, vise à mesurer les accélérations. Il s'agit généralement de jauges de contrainte qui mesurent la force liée à une accélération donnée ( $F=ma$ ).

### **1.1.5. Le bras cinématique**

Une autre solution moins onéreuse a été utilisée par Belli et al. (1995). Il s'agit d'un bras cinématique, ensemble articulé de quatre segments. Une extrémité du bras est relié à un

point fixe (plafond) et sert de référence. L'autre partie est fixée au corps du sujet et peut bouger dans les trois dimensions. Connaissant la longueur des segments et la valeur des angles (au moyen de potentiomètres), il est possible au moyen d'équations trigonométriques de déterminer la position instantanée du point mobile.

### **1.1.6. Les tables graphiques.**

Une table graphique permet de digitaliser sur un plan les coordonnées d'un stylet tenu par le sujet (par exemple, Mottet & Bootsma, 1999).

## **1.2. Reconstitution des points manquants**

Quelques procédures sont disponibles pour pallier aux incidents expérimentaux. Ces procédures doivent évidemment intervenir avant lissage des données.

### **1.2.1. L'interpolation.**

Lorsque un point ou une plage sont manquantes on peut remplacer ces données par un processus d'interpolation. Il faut pour cela prendre en considération un intervalle encadrant la zone à compléter, réaliser un ajustement des données, et reconstituer à l'aide de l'équation et en fonction des abscisses de temps les données manquantes.

D'une manière générale, l'interpolation polynomiale (spline) est recommandée. Souvent on se contente s'il n'y a qu'une donnée à remplacer de faire la moyenne des données encadrant la donnée manquante.

### **1.2.2. Le copier-coller.**

Exceptionnellement, et dans le cas de mouvements oscillants présentant un caractère régulier, on peut remplacer un segment défectueux par un segment similaire copié sur un cycle.

### **1.2.3. Reconstitution de marqueurs**

#### **1.2.3.1. Rappel trigonométrique**

Les fonctions trigonométriques permettent de décrire les relations entre les côtés et les angles d'un triangle rectangle. Les fonctions trigonométriques s'expriment en fonction des coordonnées  $x$  et  $y$  et du rayon  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

$$\sin\beta = y/r \text{ (côté opposé sur hypoténuse)}$$

$$\cos\beta = x/r \text{ (côté adjacent sur hypoténuse)}$$

$$\operatorname{tg}\beta = y/x \text{ (côté opposé sur adjacent)}$$

Les fonctions trigonométriques font donc correspondre à un angle un rapport numérique. Les fonctions arcsinus, arccosinus et arctangente sont les fonctions inverses, qui permettent de remonter à l'angle lorsque l'on connaît le rapport.

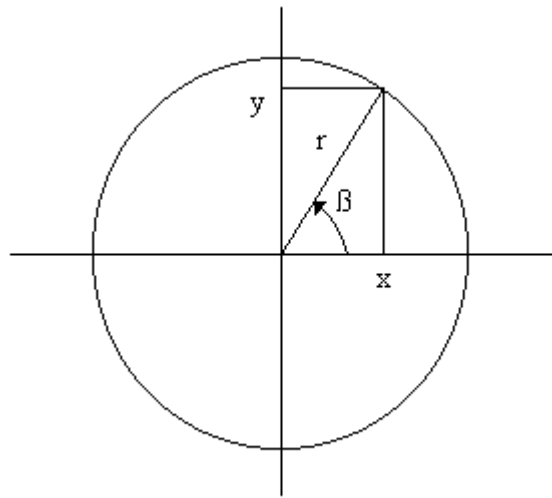
Quelques formules de calcul à connaître:

$$\sin(-\beta) = -\sin\beta$$

$$\cos(-\beta) = \cos\beta$$

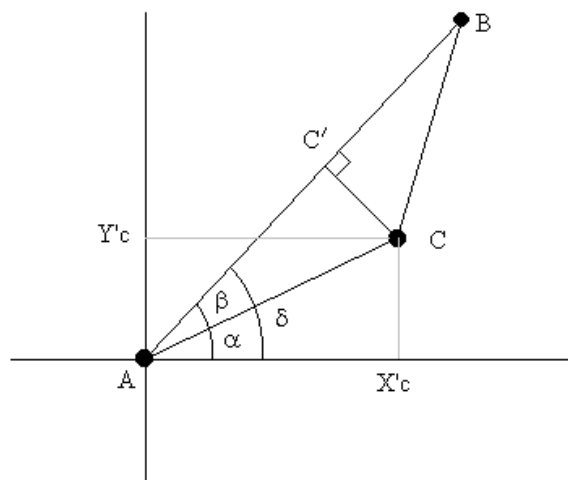
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$



### 1.2.3.2. Reconstitution par triangulation.

Soit trois points A, B, et C. Les coordonnées de A et B sont connues en deux dimensions. Les distances AC et BC sont fixes (par exemple, A est la hanche, B la cheville et C le genou). L'objectif est de reconstituer  $x_c$  et  $y_c$  à partir des coordonnées de A et B.



$$X_c = X_a + X'_c \quad \text{et} \quad Y_c = Y_a + Y'_c$$

$$X'_c = AC \cos \alpha \quad \text{et} \quad Y'_c = AC \sin \alpha$$

$$\delta = \alpha + \beta$$

$$\delta = \arctg((Y_b - Y_a)/(X_b - X_a))$$

$$\text{Par ailleurs } AC'/AB = AC/(AC+BC)$$

$$\beta = \arccos AC'/AC = \arccos 1/[AB(AC+BC)]$$

$$\alpha = \delta - \beta$$

### 1.2.3.3. Reconstruction au moyen de marqueurs surnuméraires

#### 1.2.3.3.1. Marqueurs de milieu de segment

Soient A ( $x_a, y_a, z_a$ ) et B ( $x_b, y_b, z_b$ ) les marqueurs délimitant le segment, et M ( $x_m, y_m, z_m$ ) le marqueur médian.

$$x_b = x_a + 2(x_m - x_a) = 2x_m - x_a$$

$$y_b = y_a + 2(y_m - y_a) = 2y_m - y_a$$

$$z_b = z_a + 2(z_m - z_a) = 2z_m - z_a$$

#### 1.2.3.3.2. Marqueurs extérieurs

Les marqueurs extérieurs sont fixés au corps par l'intermédiaire de tiges rigides. Ils permettent d'éviter les pertes de marqueurs liés au passage des membres libres, etc... Le marqueur étant détaché du corps, les caméras risquent moins de le perdre lors de rotations du corps.

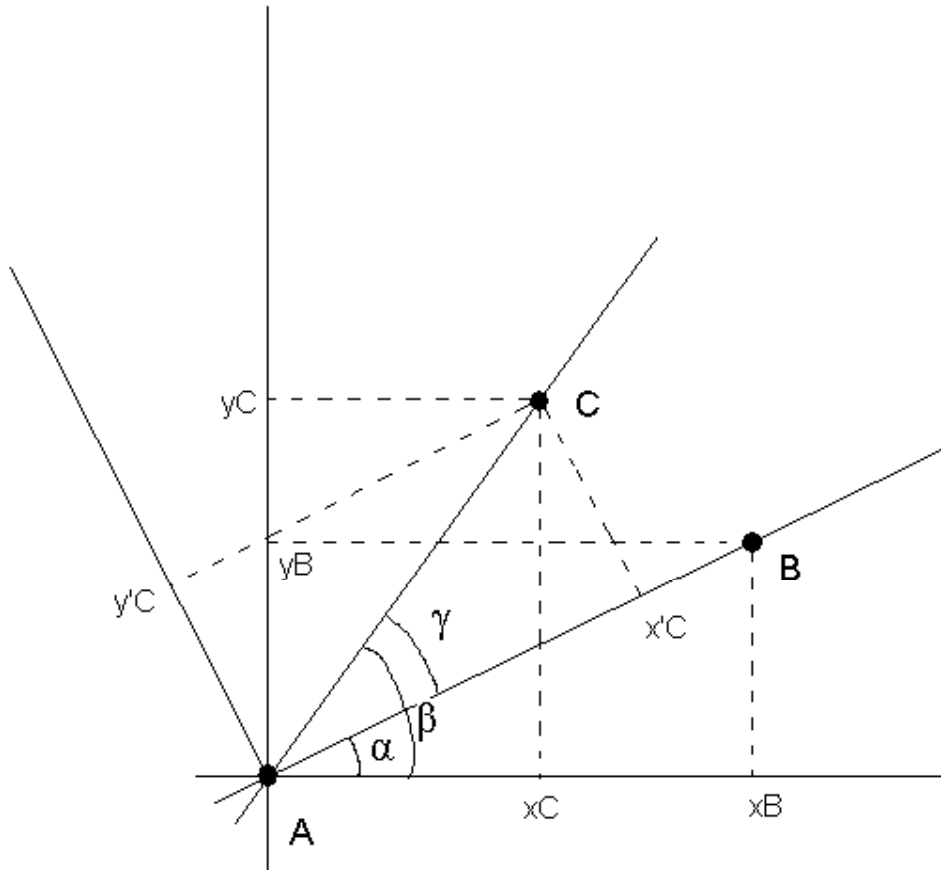
Les marqueurs extérieurs sont notamment utilisés pour analyser l'évolution d'axes corporels au cours du mouvement (voir par exemple les travaux de Wagenaar, sur l'évolution du décalage de phase entre l'axe de hanche et l'axe des épaules lors de la locomotion).

### 1.3. Rotation des données

Parfois, il peut se révéler économique de traiter en 2D, dans le cas de mouvements parfaitement symétriques (Delignières et al. 1998), où lorsque l'on estime pouvoir négliger les déplacements dans la profondeur (Nourrit, 2000).

On conserve en général l'axe vertical (z). Il convient de dédier deux marqueurs fixes (posés au sol par exemple), qui détermineront l'axe horizontal de traitement. Soient A et B les points représentant ces marqueurs (on calcule en fait les points moyens sur l'ensemble des séries). Il s'agit de redéfinir les coordonnées instantanées de tous les marqueurs, dans un

nouveau repère défini par (AB) et z, ce qui correspond à une rotation des marqueurs autour de l'axe z. La première étape consiste à ramener l'ensemble des coordonnées à l'origine A. Il suffit pour cela de retrancher aux coordonnées de chaque marqueur les coordonnées instantanées du point A ( $x_A$ ,  $y_A$  et  $z_A$ ). On travaille alors dans le plan x,y, avec le point A (0,0) comme origine. Le point B a alors pour coordonnées  $x_B$  et  $y_B$ . Soit un point C de coordonnées  $x_C$  et  $y_C$ .



$$AC = \sqrt{x_C^2 + y_C^2}$$

Soit  $\alpha$  l'angle formé par AB et x,  $\beta$  l'angle formé par AC et x, et  $\gamma$  l'angle formé par AC et AB. On a

$$\alpha = \arctg\left(\frac{y_B}{x_B}\right) \quad \text{et} \quad \beta = \arctg\left(\frac{y_C}{x_C}\right)$$

$$\gamma = \beta - \alpha$$

Soient  $x'C$  et  $y'C$  les nouvelles coordonnées de C après rotation :

$$x'C = AC \cos \gamma \quad \text{et} \quad y'C = AC \sin \gamma$$

## 1.4. Les données typiques: les séries temporelles:

Typiquement, l'analyse du mouvement produit des séries temporelles qui peuvent représenter des volumes importants: par exemple pour 10 marqueurs à 100 Hz en 3D durant 10 secondes, c'est 30 colonnes de 1000 données qui vont être engrangées.

## 2. VITESSE ET ACCELERATION

### 2.1. Vitesse moyenne et vitesse instantanée

La vitesse moyenne est le rapport entre la distance parcourue et le temps mis pour la parcourir

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

ou encore

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Cette équation est satisfaisante pour déterminer la vitesse moyenne entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ , mais ne répond pas à la question "quelle est la vitesse à l'instant  $t_1$ ". La vitesse à un moment particulier est appelée vitesse instantanée.

On définit la vitesse instantanée comme la limite de la vitesse moyenne, quand  $\Delta t$  tend vers 0:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

C'est-à-dire :

$$v = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Considérons que  $x$  est une fonction linéaire du temps

$$x = at$$

Dans ce cas  $\Delta x = a(t + \Delta t) - at = a\Delta t$

Donc  $\Delta x / \Delta t = a$

Et  $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = a$

Dans ce cas on a une vitesse constante

Si l'on considère maintenant une fonction plus complexe

$$x = at^2$$

Dans ce cas 
$$\begin{aligned}\Delta x &= a(t + \Delta t)^2 - at^2 \\ &= a(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) - at^2 \\ &= a(2t\Delta t + \Delta t^2)\end{aligned}$$

Donc 
$$\Delta x / \Delta t = a(2t + \Delta t)$$

Et 
$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = 2at$$

Dans ce cas la vitesse n'est plus une constante, mais une fonction linéaire du temps.

## 2.2. Dérivées

Soit une fonction  $y = f(x)$ . La dérivée de  $f(x)$  est le taux de variation de  $y$  par rapport à  $x$ . On note :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

avec

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Géométriquement, la dérivée correspond à la pente de la tangente à la courbe de la fonction au point  $(x, y)$ .

$dy/dx$  est la dérivée de  $y$  par rapport à  $x$ . On utilise également d'autres notations, telles que  $y'$  ( $y$  prime), ou  $\dot{y}$  ( $y$  dot), qui ont la même signification.

La vitesse est un cas particulier de dérivée, dans le cas des fonctions temporelles. Si la position est une fonction du temps, la vitesse est la dérivée de la position par rapport au temps.

Il est intéressant de connaître les dérivées des fonctions communément utilisées :

$y = a$	$dy/dx = 0$
$y = ax$	$dy/dx = a$
$y = ax^2$	$dy/dx = 2ax$
$y = ax^n$	$dy/dx = nax^{n-1}$
$y = 1/x (=x^{-1})$	$dy/dx = -1/x^2$
$y = \Delta x (=x^{1/2})$	$dy/dx = (1/2)x^{-1/2}$
$y = \sin x$	$dy/dx = \cos x$
$y = A \sin \omega t$	$dy/dx = A \omega \cos \omega t$

$$y = \cos x \qquad dy/dx = -\sin x$$

$$y = \log x \qquad dy/dx = 1/x$$

$$y = a^x \qquad dy/dx = a^x \log a$$

$$y = e^x \qquad dy/dx = e^x$$

Quelques règles de dérivation sont à connaître :

1. La dérivée d'une somme de fonctions est égale à la somme des dérivées

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

Par exemple, si  $y = x^4 + 8x^3$

Alors  $dy/dx = 4x^3 + 24x^2$

2. La dérivée d'un produit de deux fonctions est égale à la somme des fonctions multipliées la dérivée de l'autre :

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

3. Dérivation en chaîne : si z est une fonction de y, et y une fonction de x. Alors

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$$

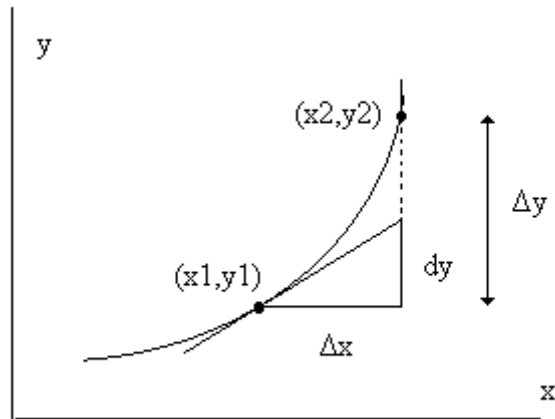
Si l'on dérive la dérivée  $dy/dx$  par rapport à x, on obtient la dérivée seconde de y par rapport à x, qui se note  $d^2y/dt^2$ . On utilise également les notations alternatives  $y'$  et  $\ddot{y}$ . Dans le cas particulier d'une dérivation par rapport au temps, la dérivée seconde correspond à l'accélération.

Par exemple,  $y = 2x^3 \qquad dy/dt = 6x^2 \qquad d^2y/dt^2 = 12x$

Les quantités  $dy$  et  $dx$  sont des différentielles. La différentielle  $dy$  de y en  $x=x_1$  est définie par la formule :

$$dy = y'(x_1) \Delta x$$

où  $y'(x_1)$  est la dérivée de y par rapport à x, calculée en  $x_1$ . Ce qui peut être représenté géométriquement par la figure suivante :



Il est clair qu'il ne faut pas confondre  $dy$  et  $\Delta y$ .  $\Delta y$  représente la variation  $y_2 - y_1$ , correspondant à la variation  $\Delta x$ .  $dy$  est la différentielle calculée en  $x_1$  pour la même variation  $\Delta x$ . On peut cependant approximer  $dy$  et  $\Delta y$ , à condition que  $\Delta x$  soit suffisamment petit et que le graphe de  $y$  soit proche d'une droite au voisinage de  $x_1$ . Par contre, on peut poser l'égalité  $dx = \Delta x$ .

### 2.3. Calcul de la vitesse et de l'accélération à partir de séries temporelles.

Généralement, on considère que la vitesse moyenne est une approximation satisfaisante de la vitesse instantanée.

$$V_x = \Delta x / \Delta t$$

Par exemple,

$$V_{x_i} = (x_i - x_{i-1}) / \Delta t$$

Dans ce cas néanmoins la vitesse ne représente ni la vitesse à  $x_i$ , ni la vitesse à  $x_{i-1}$ , mais la vitesse à un point médian. Une solution pour résoudre le problème est de baser le calcul de la vitesse sur  $2\Delta t$  plutôt que sur  $\Delta t$ .

$$V_{x_i} = (x_{i+1} - x_{i-1}) / 2\Delta t$$

On suppose alors que la ligne joignant  $x_{i+1}$  et  $x_{i-1}$  a la même pente que la droite tangente à la trajectoire en  $x_i$ .

De manière similaire, l'accélération est calculée par

$$A_{x_i} = (V_{i+1} - V_{i-1}) / 2\Delta t$$

Cette équation repose sur 5 points successifs de déplacement. Une solution alternative ne requiert de trois points :

$$V_{x_{i+1/2}} = (x_{i+1} - x_i) / \Delta t$$

$$V_{x_{i-1/2}} = (x_i - x_{i-1}) / \Delta t$$

D'où

$$Ax_i = (x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) / \Delta t^2$$

### 3. TECHNIQUES DE LISSAGE ET DE FILTRAGE DES DONNEES

Les données expérimentales sont toujours empruntées de bruit, lié soit au matériel utilisé, soit au comportement des sujets. Or le calcul des dérivées temporelles nécessite des données les moins bruitées possibles. Supposons par exemple un bruit négligeable par rapport aux données de déplacement, qui prendrait une forme

$$A \sin \omega t$$

Où  $A$  est très petit et  $\omega$  très élevé. En dérivant deux fois, on obtient une amplitude pour l'erreur différenciée de  $\omega^2 A$ , suffisamment importante pour contaminer les accélérations calculées

#### 3.1. Techniques de lissage

Les techniques de lissage supposent que si les données sont entachées d'erreur, la forme générale de la courbe reste exacte. On va donc rechercher pour éliminer le bruit la courbe passant au plus près des données brutes.

##### 3.1.1. Moyenne mobile (moving average)

Les méthodes de moyenne mobile consistent à remplacer chaque donnée brute par la moyenne d'un intervalle de données centré sur la donnée à remplacer. La puissance du lissage dépend de l'étendue des intervalles utilisés.

##### 3.1.2. La régression polynomiale

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$$

##### 3.1.3. Les fonctions splines

Les fonctions splines sont des polynômes discrets appliqués séquentiellement sur des segments délimités par des points d'inflexion. La courbe est donc représentée par une série de polynômes.

La qualité du lissage repose en grande partie sur le choix judicieux des points d'inflexion, mais il faut noter que ceux-ci sont déterminés à partir de données entachées d'erreur. Cette méthode est cependant adaptée aux mouvements irréguliers et aperiodiques.

D'une manière générale, il convient de se rappeler que les techniques de lissage d'éliminent pas le bruit, mais se contentent de l'atténuer. D'autres méthodes sont disponibles, qui constituent des variantes des interpolations polynomiales : Lowess (TableCurve, Systat), Savitky Golay (TableCurve).

## 3.2. Techniques de filtrage

### 3.2.1. Transformée de Fourier : l'analyse harmonique.

On peut décrire une courbe au moyen d'une série formée de fonctions sinus et cosinus. Cette série est connue sous le nom de série de Fourier, et possède la forme suivante :

$$X(t) = A_0 + \sum A_i \cos(n_i \omega t) + \sum B_i \sin(n_i \omega t)$$

Un algorithme rapide (Transformée Rapide de Fourier) permet de déterminer ces séries, à partir de données brutes. Ces séries permettent de calculer la densité spectrale du signal, mettant en valeur la contribution relative des différentes harmoniques. On considère que le bruit occupe les fréquences les plus élevées, et le signal les fréquences les plus basses. Le filtrage consiste à supprimer, ou à atténuer, les fréquences associées au bruit.

Un filtre passe haut permet d'atténuer les fréquences dues aux mouvements lents, et à l'inverse un filtre passe bas (*low-pass filter*) permet d'éliminer le bruit du aux hautes fréquences. La détermination de la fréquence de coupure est évidemment essentielle, afin de ne pas distordre le signal en lui-même.

Certains logiciel permettent de réaliser de manière automatique la transformation inverse de Fourier (TableCurve), qui reconstitue la série temporelle en ne conservant que la bande passante retenue.

Le filtre de Butterworth est largement répandu, en raison de sa simplicité de calcul. Il s'agit d'un filtre dit récursif, qui fait correspondre à une série  $x_n$  une série  $y_n$  telle que chaque élément  $y_n$  est la somme pondérée d'un certain nombre d'éléments de la série d'entrée et d'un certain nombre d'éléments de la série de sortie précédente.

Par exemple pour un filtre d'ordre 2 :

$$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{(n-1)} + a_2 x_{(n-2)} + b_1 y_{(n-1)} + b_2 y_{(n-2)}$$

$a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  et  $b_2$  sont les coefficients du filtre. Leur somme est égale à 1. Leur détermination repose sur le rapport entre la fréquence d'acquisition du signal ( $f_s$ ) et la fréquence de coupure ( $f_c$ ).

$$\omega c = \tan(\pi f_c / f_s)$$

$$K1 = (\sqrt{2})\omega c \text{ (pour un filtre Butterworth)}$$

$$K2 = \omega c^2$$

$$a_0 = K2 / (1 + K1 + K2)$$

$$a_1 = 2a_0$$

$$a_2 = a_0$$

$$K_3 = 2a_0/K_2$$

$$b_1 = -2a_0 + K_3$$

$$b_2 = 1 - 2a_0 - K_3 = 1 - a_0 - a_1 - a_2 - b_1$$

Winter (1979) présente des tables des coefficients à appliquer pour la construction de filtres d'ordre 2, en fonction des rapports  $f_s/f_c$  les plus courants.

$$D'une\ manière\ générale,\ y_n = \sum a_p x_{(n-p)} + \sum b_k y_{(n-k)}$$

Winter *et al.* (1974) notent qu'un tel filtre entraîne un décalage de phase entre les valeurs d'entrée et les valeurs de sortie. Il préconise de remédier à cet effet par un second passage du filtre, en ordre temporel inverse. Ce second passage rétablit le décalage de phase à zéro. Cependant, ce second passage va déboucher sur une fréquence de rupture plus sévère. Winter (1979) donne un exemple dans lequel la fréquence de coupure finale est égale à .802 de la fréquence du premier passage. La fréquence de coupure à introduire dans l'équation doit être rectifiée en conséquence.

#### 4. DETERMINATION DES COORDONNEES DE POINTS VIRTUELS

##### 4.1. Dimension des segments :

En l'absence de données directement mesurées sur le sujet, Winter (1979) propose les approximations suivantes, en pourcentage de la taille totale (le sujet est supposé debout, bras le long du corps, pour les distances relative au sol) :

Distance des yeux au sol	93.6%
Distance du menton au sol	87.0%
Distance de l'épaule au sol	81.8%
Distance du coude au sol	63.0%
Distance du poignet au sol	48.5%
Distance du bout de doigt au sol	37.7%
Hauteur de la tête	13.0%
Hauteur de l'ensemble tronc + tête	52.0%
Largeur d'épaules	25.9%
Largeur des hanches	19.1%
Longueur du bras	18.6%
Longueur de l'avant bras	14.6%
Longueur de la main	10.8%
Distance de la hanche au sol	53.0%
Distance du genou au sol	28.5%
Distance de la cheville au sol	03.9%
Largeur du pied	05.5%
Longueur du pied	15.2%

Segment	Définition	%Pds	Prox.	Dist
Main	Poignet/Phalange 2 du médus	0.006	0.506	0.494
Avant-bras	Coude/Poignet	0.016	0.430	0.570
Bras	Glène humérale/Coude	0.028	0.436	0.564
Avant-bras et main	Coude/Poignet	0.022	0.682	0.318
Membre supérieur	Glène humérale/Poignet	0.050	0.530	0.470
Pied	Malleole/tête métatarse 2	0.0145	0.500	0.500
Jambe	Condyle fémoral/Malléole	0.0465	0.433	0.567
Cuisse	Grand trochanter/Condyle fémoral	0.100	0.433	0.567
Jambe et pied	Condyle fémoral/Malléole	0.061	0.606	0.394
Membre inférieur	Grand trochanter/ Malléole	0.161	0.447	0.553
Tête et cou	C7-D1/Canal auditif	0.081	1.000	-
Thorax	C7-D1/D12-L1	0.216	0.820	0.18
Abdomen	D12-L1/L4-L5	0.139	0.44	0.56
Pelvis	L4-L5/Grand trochanter	0.142	0.105	0.895
Thorax et abdomen	C7-D1/L4-L5	0.355	0.63	0.37
Abdomen et pelvis	D12-L1/Grand trochanter	0.281	0.27	0.73
Tronc	Grand trochanter/glène humérale	0.497	0.50	0.50
Tronc et tête	Grand trochanter/glène humérale	0.578	0.66	0.34

%Pds : rapport entre le poids du segment et le poids total

Prox : distance entre le centre de gravité et la référence proximale, rapportée à la longueur du segment

Dist. : distance entre le centre de gravité et la référence distale, rapportée à la longueur du segment

Ces tableaux permettent de calculer des CG partiels, puis le CG total.

Par exemple CGJ est le centre de gravité jambe + pied

$$X_{CGJ} = X_{genou} + (0.606)(X_{pied} - X_{genou})$$

$$Y_{CGJ} = Y_{genou} + (0.606)(Y_{pied} - Y_{genou})$$

CGC est le centre de gravité de la cuisse

$$X_{CGC} = X_{hanche} + (0.433)(X_{genou} - X_{hanche})$$

$$Y_{CGC} = Y_{hanche} + (0.433)(Y_{genou} - Y_{hanche})$$

CGMI est de gravité du membre inférieur

$$X_{CGMI} = ((0.061)(X_{CGJ}) + (0.1)(X_{CGC})) / (0.161)$$

$$Y_{CGMI} = ((0.061)(Y_{CGJ}) + (0.1)(Y_{CGC})) / (0.161)$$

## 4.2. Centre de gravité d'un système multiségmentaire.

Soit un système constitué de  $k$  segments. Soient  $x_i$  et  $y_i$  les coordonnées du centre de masse du segment  $i$ . Soit  $m_i$  la masse du segment  $i$ . Les coordonnées  $x$  et  $y$  du centre total de masse sont:

$$x = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$$

$$y = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}$$

## 5. CALCUL DES ANGLES ARTICULAIRES

### 5.1. Calcul en deux dimensions

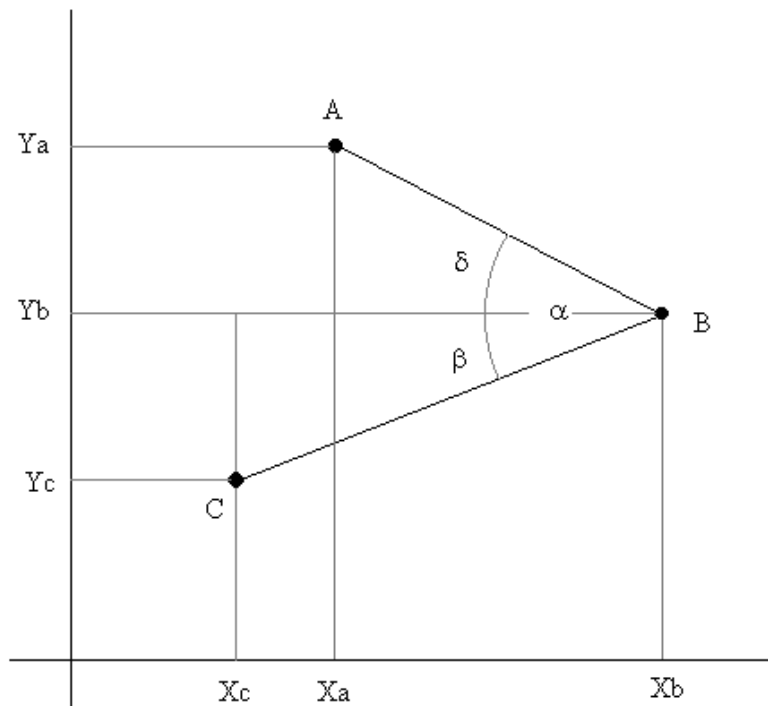
#### 5.1.1. Calcul de l'angle absolu d'un segment.

Par définition, un segment horizontal a un angle absolu de 0 degrés.

Soit un segment AB

$$\theta_{AB} = \arctg\left(\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}\right)$$

#### 5.1.2. Calcul de l'angle entre deux segments.



$$\alpha = \beta + \delta$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{Yb - Ya}{\sqrt{(Xb - Xc)^2 + (Yb - Yc)^2}}\right)$$

$$\delta = -\arcsin\left(\frac{Yb - Ya}{\sqrt{(Xb - Xa)^2 + (Yb - Ya)^2}}\right)$$

ou

$$\beta = \arctg\left(\frac{Yb - Yc}{Xb - Xc}\right)$$

$$\delta = -\arctg\left(\frac{Yb - Ya}{Xb - Xa}\right)$$

## 5.2. Calcul en 3D d'un angle articulaire.

Soient trois points A, B, et C

Soit  $\beta_1$  l'angle ABC

Soit  $\beta_2$  l'angle BAC

Soit  $\beta_3$  l'angle BCA

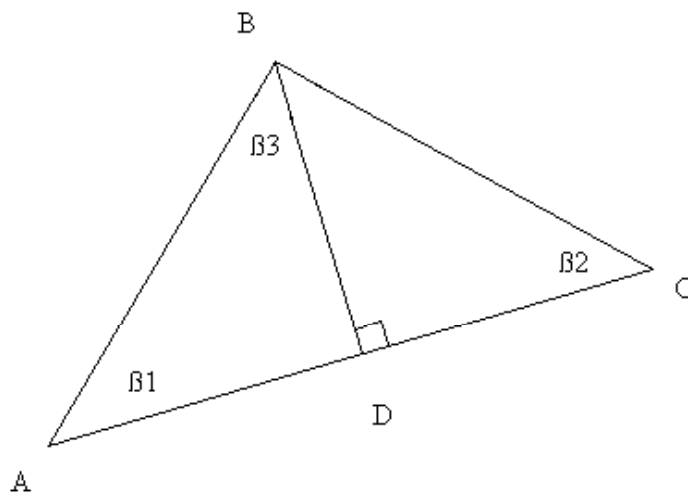
On calcule dans un premier temps les distances entre les points:

$$AB = \sqrt{[(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + z_a - z_b]^2}$$

$$AC = \sqrt{[(x_a - x_c)^2 + (y_a - y_c)^2 + z_a - z_c]^2}$$

$$BC = \sqrt{[(x_b - x_c)^2 + (y_b - y_c)^2 + z_b - z_c]^2}$$

Soit D la projection de B sur AC



$$\begin{aligned} \beta_3 &= 180 - \beta_1 - \beta_2 \\ &= 180 - \arccos(AD/AB) - \arccos(DC/BC) \end{aligned}$$

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$BC^2 = DC^2 + BD^2$$

$$AB^2 - AD^2 = BC^2 - DC^2$$

$$= BC^2 - (AC - AD)^2$$

$$= BC^2 - AC^2 - AD^2 + 2AC \cdot AD$$

d'où  $AD = (AB^2 + AC^2 - BC^2)/2AC$   
de même  $DC = (BC^2 + AC^2 - AB^2)/2AC$

$$\beta_3 = 180 - \arccos\left(\frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AC \cdot AB}\right) - \arccos\left(\frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2AC \cdot AB}\right)$$

## 6. MODELISATION DES TRAJECTOIRES

### 6.1. Régression linéaire

Soit la représentation graphique, en deux dimensions, de la relation entre deux variables  $x$  et  $y$ . Chaque point  $M$  est associé à un couple  $(x,y)$ . On cherche à déterminer une droite qui représenterait au mieux la relation, qui s'ajusterait au nuage de points. La droite retenue est celle pour laquelle la somme des carrés des distances verticales de chaque point  $M$  à la droite est minimale.

On démontre que cette droite passe par un point de coordonnées  $(m_x, m_y)$ , et que son équation est de la forme

$$y = ax + b$$

avec 
$$a = \frac{\sum (x - m_x)(y - m_y)}{\sum (x - m_x)^2}$$

et 
$$b = m_y - a m_x$$

On peut développer ces équation pour obtenir des formules de calcul plus pratiques:

$$a = \frac{N(\sum xy) - \sum x \sum y}{N \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$b = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{N \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$a$  et  $b$  sont les paramètres de la droite des moindres carrés.

$$r = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{(N \sum x^2 - (\sum x)^2)(N \sum y^2 - (\sum y)^2)}}$$

La formule  $y=ax + b$  permet de calculer pour chaque  $x$  une valeur théorique de  $y$ . L'échantillon des  $y_{th}$ - $y$  constitue les résidus de la régression. La droite des moindres carrés est donc la droite qui minimise la somme des carrés des résidus.

Un exemple simple de calcul est développé ci-après :

x	y	$x^2$	$y^2$	xy
1	1	1	1	1
2	2	4	4	4
3	4	9	16	12
4	3	16	9	12
5	5	25	25	25
$\Sigma x=15$	$\Sigma y=15$	$\Sigma x^2=55$	$\Sigma y^2=55$	$\Sigma xy=54$

$$\begin{aligned} a &= ((5*54)-(15*15))/((5*55)-(15^2)) \\ &= (270-225)/(275-225) \\ &= 45/50 \\ &= 0.9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= ((55*15)-(15*54))/((5*55)-(15^2)) \\ &= (825-810)/(275-225) \\ &= (15/50) \\ &= 0.3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= ((5*54)-15^2)/\sqrt{((5*55)-(15^2))*((5*55)-(15^2))} \\ &= 45/\sqrt{(275-225)(275-225)} \\ &= 45/\sqrt{(275-225)(275-225)} \\ &= 45/\sqrt{50^2} \\ &= 45/50 \\ &= 0.9 \end{aligned}$$

$$y=(.9)x + .3$$

x	$y_{réel}$	$y_{théorique}$	résidus
1	1	1.2	-0.2
2	2	2.1	-0.1
3	4	3.0	+1.0
4	3	3.9	-0.9
5	5	4.8	+0.2

## 6.2. Régression curvilinéaire

Par une transformation logarithmique de X, de Y ou des deux simultanément, on peut reconstituer les ajustements logarithmiques, exponentiel et puissance.

$$\log(X) \text{ et } Y \qquad \text{ajustement logarithmique} \qquad y=A\log x + B$$

A et B sont ici donnés directement.

X et log(Y)                      ajustement exponentiel                       $y=B*e^{Ax}$

log(y)= ax + b donc       $y= e^{ax + b}$   
    $y=e^b*e^{ax}$   
    $y=B*e^{ax}$

A=a et B=eb

log(X) et log(Y)                      ajustement puissance                       $y=Bx^A$

log(y)=a(log(x)) + b      donc       $y=e^{a(\log(x)) + b}$   
    $y=e^{a(\log(x))}*e^b$   
    $y=e^b*x^a$

A=a et B=eb

D'autres fonctions plus complexes peuvent être obtenues par la même méthode. Le choix du meilleur ajustement se fait ensuite par comparaison des coefficients de corrélation de chaque équation.

## 7. STATISTIQUES APPLIQUEES AUX SERIES TEMPORELLES

Il existe deux catégories de modèles pour rendre compte d'une série temporelle. Les premiers considèrent que les données sont une fonction du temps ( $y = f(t)$ ). Cette catégorie de modèle peut être ajustée par la méthode des moindres carrés, ou d'autres méthodes itératives. L'analyse des modèles par transformée de Fourier est une version sophistiquée de ce type de modèle.

Une seconde catégorie de modèles cherche à déterminer chaque valeur de la série en fonction des valeurs qui la précède ( $y_t = f(y_{t-1}, y_{t-2}, \dots)$ ). C'est le cas des modèles ARIMA ("Auto-Regressive – Integrated – Moving Average"). Cette catégorie de modèles a été popularisée et formalisée par Box et Jenkins (1976).

A noter que le choix de l'un ou l'autre type de modèle est surtout théorique: est-il raisonnable de penser que dans un phénomène donné, les points sont fondamentalement fonction des points précédents et de leurs erreurs, plutôt qu'un signal, périodique ou non, entaché de bruit. On peu noter cependant que souvent, on a recours à l'analyse de variance pour traiter les séries temporelles. Or une des assumptions majeures de l'ANOVA est que les résidus des différentes mesures ne sont pas auto-corrélés. Ce n'est évidemment pas le cas si la performance à l'essai t est liée à la performance réalisée à l'essai t-1.

Un modèle ARIMA est étiqueté comme modèle ARIMA (p,d,q), dans lequel:  
p est le nombre de termes auto-régressifs  
d est le nombre de différences  
q est le nombre de moyennes mobiles.

Les processus autorégressifs supposent que chaque point peut être prédit par la somme pondérée d'un ensemble de points précédents, plus un terme aléatoire d'erreur.

Le processus d'intégration suppose que chaque point présente une différence constante avec le point précédent.

Les processus de moyenne mobile supposent que chaque point est fonction des erreurs entachant les points précédant, plus sa propre erreur.

### 7.1. Différenciation.

L'estimation des modèles ARIMA suppose que l'on travaille sur une série stationnaire. Ceci signifie que la moyenne de la série est constante dans le temps, ainsi que la variance. La meilleure méthode pour éliminer toute tendance est de différencier, c'est-à-dire de remplacer la série originale par la série des différences adjacentes. Une série temporelle qui a besoin d'être différenciée pour atteindre la stationnarité est considérée comme une version intégrée d'une série stationnaire (d'où le terme *Integrated*).

La correction d'une non-stationnarité en termes de variance peut être réalisée par des transformation de type logarithmique (si la variance croît avec le temps) ou à l'inverse exponentielle. Ces transformations doivent être réalisées avant la différenciation.

Une différenciation d'ordre 1 suppose que la différence entre deux valeurs successives de  $y$  est constante.

$$y_t - y_{t-1} = \mu + \varepsilon_t$$

$\mu$  est la constante du modèle, et représente la différence moyenne en  $y$ . Un tel modèle est un ARIMA(0,1,0). Il peut être représenté comme un accroissement linéaire en fonction du temps. Si  $\mu$  est égal à 0, la série est stationnaire.

Les modèles d'ordre 2 travaillent non plus sur les différences brutes, mais sur les différences de différence. La seconde différence de  $y$  au moment  $t$  est égale à  $(y_t - y_{t-1}) - (y_{t-1} - y_{t-2})$ , c'est-à-dire à  $y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}$ .

Un modèle ARIMA(0,2,0) obéira à l'équation de prédiction suivante :

$$y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2} = \mu + \varepsilon_t$$

ou encore:

$$y_t = \mu + 2y_{t-1} - y_{t-2} + \varepsilon_t$$

### 7.2. Auto-régression

Les modèles auto-régressifs supposent que  $y_t$  est une fonction linéaire des valeurs précédentes.

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{(t-1)} + \phi_2 y_{(t-2)} + \phi_3 y_{(t-3)} + \varepsilon_t$$

Littérairement, chaque observation est constituée d'une composante aléatoire (choc aléatoire,  $\varepsilon$ ) et d'une combinaison linéaire des observations précédentes.  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  et  $\phi_3$  dans cette équation sont les coefficients d'auto-régression

A noter que cette équation porte soit sur les données brutes, soit sur les données différenciées si une différenciation a été nécessaire. Pour un modèle ARIMA(1,1,0) on aura :

$$y_t - y_{t-1} = \mu + \phi(y_{t-1} - y_{t-2}) + \varepsilon_t$$

Ce qui peut également être écrit:

$$y_t = \mu + y_{t-1} + \phi(y_{t-1} - y_{t-2}) + \varepsilon_t$$

Notez qu'un processus auto-régressif ne sera stable que si les paramètres sont compris dans un certain intervalle ; par exemple, s'il n'y a qu'un paramètre auto-régressif, il doit se trouver dans l'intervalle  $-1 < \phi_1 < +1$ . Dans les autres cas, les effets passés s'accumuleraient et les valeurs successives des  $x_t$  se déplaceraient infiniment vers l'avant, ce qui signifie que la série ne serait pas stationnaire.

### 7.3. Moyenne mobile

Les modèles à moyenne mobile suggèrent que la série présente des fluctuations autour d'une valeur moyenne. On considère alors que la meilleure estimation est représentée par la moyenne pondérée d'un certain nombre de valeurs antérieures (ce qui est le principe des procédures de moyennes mobiles utilisées pour le lissage des données). Ceci revient en fait à considérer que l'estimation est égale à la moyenne vraie, auquel on ajoute une somme pondérée des erreurs ayant entaché les valeurs précédentes :

$$y_t = \mu - \theta_1 \varepsilon_{(t-1)} - \theta_2 \varepsilon_{(t-2)} - \theta_3 \varepsilon_{(t-3)} + \varepsilon_t$$

Littérairement, chaque observation est composée d'une composante d'erreur aléatoire (choc aléatoire,  $\varepsilon$ ) et d'une combinaison linéaire des erreurs aléatoires passées.  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  et  $\theta_3$  sont les coefficients de moyenne mobile du modèle.

Comme précédemment cette équation porte soit sur les données brutes, soit sur les données différenciées si une différenciation a été nécessaire. Pour un modèle ARIMA(0,1,1) on aura :

$$y_t - y_{t-1} = \mu - \theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

Ce qui peut également être écrit:

$$y_t = \mu + y_{t-1} - \theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

Un modèle de moyenne mobile correspond à des séries exhibant des fluctuations aléatoires autour d'une moyenne variant lentement. Plutôt que de prendre comme

précédemment la valeur précédente comme prédicteur, on utilise une moyenne de quelques observations précédentes, de manière à éliminer le bruit, et estimer plus précisément la moyenne locale.

On peut également envisager des modèles mixtes: par exemple un modèle ARIMA(1,1,1) aura l'équation de prédiction suivante:

$$y_t = \mu + y_{t-1} + \phi(y_{t-1} - y_{t-2}) - \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

#### 7.4. Signification des paramètres des modèles ARIMA

L'objectif essentiel des modèles ARIMA est de permettre une prédiction de l'évolution future d'un phénomène. Son développement dans le domaine de l'économétrie est basé sur ce principe. Un autre intérêt, peut-être plus essentiel en ce qui concerne la recherche scientifique, est de comprendre la signification théorique de ces différents processus. Il est clair cependant que cette interprétation dépend de la nature du phénomène étudié, et des modèles dont le chercheur dispose pour en rendre compte.

- Un processus non différencié à bruit blanc (ARIMA(0,0,0)) suggère des fluctuations aléatoires autour d'une valeur de référence stable. Cette valeur de référence peut être considérée comme une caractéristique stable du système étudié (trait de personnalité, mémoire, capacité stabilisée, etc..)

- Un processus de moyenne mobile suggère que la valeur de référence évolue d'une mesure à l'autre. Plus précisément, la valeur de référence est fonction de la valeur de référence précédente et de l'erreur ayant entaché la mesure précédente. Le processus tend simultanément à préserver la valeur de référence et à garder la mémoire des perturbations successives les erreurs successives. La valeur du coefficient de moyenne mobile détermine l'équilibre entre ces deux tendances opposées.

- Un processus auto-régressif suggère que le phénomène étudié possède une dynamique de relaxation par rapport à une valeur attractive. Lorsque le processus s'écarte de cette valeur, il tend à la rejoindre au bout d'un certain temps. La valeur du coefficient d'auto-régression détermine la force de l'attracteur.

Par exemple, Spray et Newell (1986) analysent des données tirées d'une expérimentation portant sur le rôle de la connaissance des résultats dans l'apprentissage. Les sujets réalisent 77 essais dans une tâche manuelle. Le protocole comprenait plusieurs groupes, différenciés par des combinaisons spécifiques d'essais avec ou sans connaissance des résultats. Notamment, certains sujets disposaient de connaissance des résultats tout au long des 77 essais, pour d'autre la CR était supprimée au-delà de 17, 32 ou 52 essais. Un groupe n'avait pas de CR du tout.

Les résultats de la modélisation montrent que les séries avec CR (ou les portions de séries avec CR) peuvent être représentée par des processus à bruit blanc du type:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t$$

C'est-à-dire un modèle ARIMA (0,0,0). Cette équation suggère donc que les performances successives oscillent de manière aléatoire autour d'une valeur moyenne, sorte de référence interne construite par la connaissance des résultats.

Les séries sans CR (ou les portions de série sans CR) sont quant à elles modélisées selon un ARIMA(0,1,1) selon la formule:

$$y_t = \mu - \theta_1 \varepsilon_{(t-1)} + \varepsilon_t$$

ou

$$y_t = r_t + \varepsilon_t$$

$r_t$  représentant la valeur de référence, qui cette fois change à chaque essai. On peut dériver du modèle que

$$r_t = r_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{(t-1)}$$

C'est-à-dire que la référence est une combinaison de la référence précédente et de l'erreur ayant entaché l'essai précédent. Ce modèle indique clairement que l'essai en cours est influencé par l'essai précédent, ce qui n'était pas le cas dans les essais avec CR.

### **7.5. Détermination de l'ordre de différenciation.**

Une série stationnaire fluctue autour d'une valeur moyenne et sa fonction d'autocorrélation décline rapidement vers zéro. Si une série présente des auto-corrélations positives pour un grand nombre de décalages (par exemple 10 ou plus), alors elle nécessite d'être différenciée.

L'ordre optimal de différenciation est souvent celui pour lequel l'écart-type est minimal. Un accroissement de l'écart-type doit donc être considéré comme un symptôme de sur-différenciation. Un troisième symptôme de sur-différenciation est un changement systématique de signe d'une observation à l'autre.

Un modèle sans différenciation suppose que la série originale est stationnaire. Un modèle avec une différenciation d'ordre 1 suppose que la série originale présente une tendance constante. Un modèle avec une différenciation d'ordre 2 suppose que la série originale présente une tendance variant dans le temps.

### **7.6. Identification des termes AR.**

Après que la série ait été stationnarisée, l'étape suivante consiste à identifier les termes AR et MA nécessaires pour corriger les auto-corrélations résiduelles. Cette analyse est basée sur l'examen des fonctions d'auto-corrélation et d'auto-corrélation partielle. Rappelons que l'auto-corrélation est la corrélation d'une série avec elle-même, selon un décalage (*lag*) défini. L'auto-corrélation de décalage 0 est par définition égale à 1. La fonction d'auto-corrélation fait correspondre à chaque décalage l'auto-corrélation correspondante.

D'une manière générale, une corrélation partielle entre deux variables est la quantité de corrélations qui n'est pas expliquée par les relations de ces variables avec un ensemble spécifié d'autres variables. Dans le cas des séries temporelles, la corrélation partielle de décalage  $k$  est la corrélation entre  $y_t$  et  $y_{t-k}$ , contrôlant l'influence des  $k-1$  valeurs interposées.

L'autocorrélation de décalage 1 est la corrélation entre  $y_t$  et  $y_{t-1}$ . On suppose que c'est également la corrélation entre  $y_{t-1}$  et  $y_{t-2}$ . Si  $y_t$  et  $y_{t-1}$  sont corrélés, et que  $y_{t-1}$  et  $y_{t-2}$  le sont également, on peut supposer qu'une corrélation sera présente entre  $y_t$  et  $y_{t-2}$ . C'est-à-dire que la corrélation de décalage 1 se propage au décalage 2 et sans doute aux décalages d'ordre supérieurs. Plus précisément, la corrélation attendue au décalage 2 est le carré de la corrélation observée au décalage 1. L'auto-corrélation *partielle* de décalage 2 est donc la différence entre l'auto-corrélation de décalage 2 et la corrélation attendue due à la propagation de la corrélation de décalage 1.

Les outils principaux utilisés lors de la phase d'identification sont donc les tracés de la série, les corrélogrammes d'autocorrélation (FAC), et d'autocorrélation partielle (FACP). La décision n'est pas simple et les cas les plus atypiques requièrent, outre l'expérience, de nombreuses expérimentations avec des modèles différents (avec divers paramètres ARIMA). Toutefois, les composantes des séries chronologiques empiriques peuvent souvent être assez bien approchées en utilisant l'un des 5 modèles de base suivants, identifiables par la forme de l'autocorrélogramme (FAC) et de l'autocorrélogramme partiel (FACP). Puisque le nombre de paramètres (à estimer) de chaque type dépasse rarement 2, il est souvent judicieux d'essayer des modèles alternatifs sur les mêmes données.

**(1) Un paramètre autorégressif (p) :** FAC - décomposition exponentielle ; FACP - pic à la période 1, pas de corrélation pour les autres périodes.

**(2) Deux paramètres autorégressifs (p) :** FAC - une composante de forme sinusoïdale ou un ensemble de décompositions exponentielles ; FACP - pics aux périodes 1 et 2, aucune corrélation pour les autres périodes.

**(3) Un paramètre de moyenne mobile (q) :** FAC - pic à la période 1, aucune corrélation pour les autres périodes ; FACP - exponentielle amortie.

**(4) Deux paramètres de moyenne mobile (q) :** FAC - pics aux périodes 1 et 2, aucune corrélation pour les autres périodes ; FACP - une composante de forme sinusoïdale ou un ensemble de décompositions exponentielles.

**(5) Un paramètre autorégressif (p) et un de moyenne mobile (q) :** FAC - décomposition exponentielle commençant à la période 1 ; FACP - décomposition exponentielle commençant à la période 1.

## 7.7. Modèles saisonniers

L'ARIMA saisonnière multiplicative est une généralisation et une extension de la méthode présentée aux paragraphes précédents, pour des séries où le même phénomène se répète au cours du temps, à chaque saison. Outre les paramètres non saisonniers, des paramètres saisonniers pour un décalage spécifié (repéré lors de la phase d'identification) doivent être estimés. Comme pour les paramètres de l'ARIMA simple, ce sont : les paramètres auto-régressifs saisonniers (ps), de différenciation saisonnière (ds), et de moyenne

mobile saisonnière (qs). Par exemple, le modèle  $(0,1,2)(0,1,1)$  décrit un modèle sans paramètre auto-régressif, avec 2 paramètres de moyenne mobile normaux et 1 paramètre de moyenne mobile saisonnier. Le calcul de ces paramètres intervient après différenciation une fois de 1 période, et une fois saisonnièrement. Le décalage saisonnier utilisé pour les paramètres saisonniers est souvent déterminé lors de la phase d'identification et doit être explicitement spécifié.

Les recommandations générales concernant la sélection des paramètres à estimer (basés sur les FAC et FACP) s'appliquent également aux modèles saisonniers. La principale différence est que dans les séries saisonnières, les FAC et FACP auront des coefficients assez importants pour de nombreuses périodes saisonnières (en plus de leur composante globale reflétant la composante non saisonnière de la série).

### **7.8. ARIMA pour Séries Chronologiques Interrompues**

Une question qui se pose fréquemment dans les analyses de séries chronologiques est de savoir si un événement extérieur (exogène) a perturbé les observations ultérieures. Par exemple, la mise en œuvre d'une nouvelle politique économique a-t-elle permis d'améliorer les performances économiques ; une nouvelle loi anti-crime a-t-elle permis d'infléchir les taux d'agression suivants ; et ainsi de suite. En général, nous souhaiterions pouvoir évaluer l'impact d'un ou plusieurs événements discrets sur les valeurs de la série chronologique. Ce type d'analyse de série chronologique interrompue est décrit en détail par McDowall, McCleary, Meidinger, et Hay (1980). McDowall distingue entre trois grands types d'impact possibles : (1) soudain et permanent, (2) permanent et graduel, et (3) soudain et temporaire.

#### **Impact Soudain et Permanent**

Un impact soudain et permanent implique simplement que la moyenne globale de la série chronologique se trouve modifiée après l'intervention ; le déplacement global est noté  $\omega$ .

#### **Impact Graduel et Permanent**

La structure d'impact graduel et permanent implique que l'augmentation ou la diminution due à l'intervention soit progressive, et que l'impact permanent final ne devienne évident qu'après un certain temps.

#### **Impact Soudain et Temporaire**

Un impact soudain et temporaire implique que l'augmentation ou la diminution initiale soudaine due à l'intervention s'estompe lentement, sans modification permanente de la moyenne de la série.

## 8. Les processus de mémoire à long terme.

Les processus ARIMA sont caractérisés par une mémoire à court terme : La valeur actuelle est déterminée la valeur qui précède, et l'importance des valeurs précédentes décroît de manière exponentielle. De nombreux phénomènes naturels semblent posséder des dépendances temporelles à plus long terme : les corrélations dans la série persistent de manière durable. Ces caractéristiques signent la présence d'une structure fractale.

### 8.1. Bruit blanc, mouvement brownien et mouvement brownien fractionnaire.

On appelle bruit toute variation imprévisible d'une quantité dans le temps. Le *bruit blanc* est le plus aléatoire des bruits. Dans ce cas, il n'existe aucune corrélation entre les accroissements successifs de la quantité. La fonction d'auto-corrélation est donc nulle ( $C(\tau)=0$ ), et la densité spectrale est équivalente quelle que soit la fréquence (ce qui est une caractéristique de la lumière blanche, d'où le nom attribué à ce type de distribution). Le bruit blanc a une distribution gaussienne, et une moyenne nulle.

Le *mouvement brownien* est l'intégration d'un bruit blanc. On parle également de marche au hasard biaisée (*biased random walk*). En une dimension, il représente par exemple le mouvement d'une particule le long d'une ligne sous l'effet de chocs de direction et d'intensité aléatoires.

Soit  $x(t)$  la position de la particule au temps  $t$

$$x(t)=x(t-1) + \Delta x(t),$$

les accroissements  $\Delta x(t)$  suivant une distribution à bruit blanc. Einstein (1905) a montré que dans le cas d'un mouvement brownien, la variance des accroissements est proportionnelle à l'intervalle de temps considéré. Les accroissements étant de moyenne nulle, cette variance correspond à l'espérance mathématique du carré des accroissements :

$$\begin{aligned} \text{Var}(\Delta x) &= E((\Delta x - E(\Delta x))^2) \\ &= E(\Delta x^2) - E(\Delta x)^2 \\ &= E(\Delta x^2) \end{aligned}$$

Cette espérance mathématique peut être estimée par la moyenne calculée sur un intervalle considéré,  $\langle \Delta x^2 \rangle$ . La relation d'Einstein prend la forme suivante :

$$\text{Var}(\Delta x) = \langle \Delta x^2 \rangle = 2D\Delta t$$

où le paramètre  $D$  est le coefficient de diffusion. Le coefficient de diffusion est une mesure moyenne de l'activité stochastique, c'est-à-dire qu'il est lié à l'amplitude et à la fréquence des chocs. La relation ci-dessus est aisément extensible aux mouvements brownien bi- ou tridimensionnels.

Le terme de *mouvement brownien fractionnaire* a été introduit par Mandelbrot et van Ness (1968), et constitue une généralisation du mouvement brownien. Pour cette famille de processus, la relation d'Einstein est généralisée sous la loi d'échelle suivante:

$$Var(\Delta x) = \langle \Delta x^2 \rangle \propto \Delta t^{2H}$$

Ou encore

$$\sigma_{\Delta x} = \propto \Delta t^H$$

dans laquelle  $H$  peut être n'importe quel réel compris entre 0 et 1. Pour un mouvement classique brownien,  $H=0.5$ , et l'on retrouve la relation linéaire d'Einstein.

## 8.2. Les corrélations à long terme

Le mouvement brownien fractionnaire est caractérisé par la présence de corrélations à long terme, lorsque  $H$  est différent de 0.5. Un exposant supérieur à 0.5 révèle des phénomènes de persistance, c'est-à-dire que l'évolution de la série tend à suivre des tendances. Si la série a augmenté précédemment, la probabilité est forte qu'il continue à le faire. Les séries persistantes ont une mémoire à long terme, c'est-à-dire qu'il existe une corrélation à long terme entre les événements actuels et les événements futurs. Chaque observation porte la mémoire des événements qui l'ont précédé.

A l'inverse, un exposant inférieur à 0.5 révèle un phénomène d'anti-persistance. Dans ce cas les accroissements successifs tendent à être négativement corrélés. Une augmentation de la variable tend à être suivi d'une diminution, et vice-versa. La figure suivante illustre les séries temporelles caractéristiques des processus persistants (à gauche) et anti-persistant (à droite).

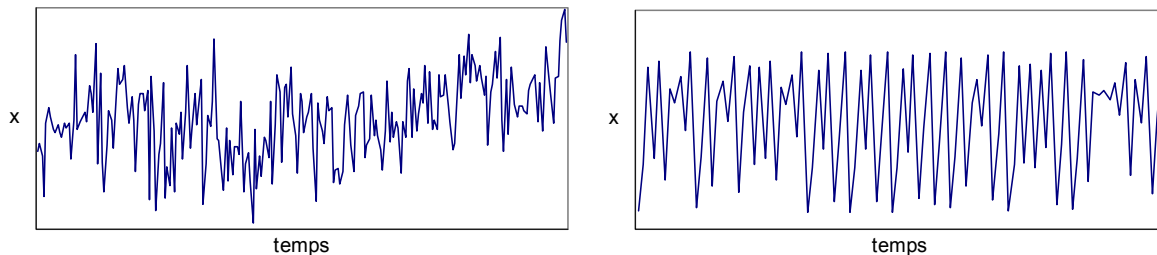


Figure 3 : Exemples de processus stochastiques persistant (à gauche: évolution des températures moyennes annuelles à Genève de 1755 à 1993) et anti-persistant (à droite: fonction logistique,  $x=4t(1-t)$ ).

Une série présentant des corrélations à long terme est définie comme une série présentant une fonction d'auto-corrélation possédant une propriété très précise:  $C(\tau) \approx \tau^{-\gamma}$ , avec  $0 < \gamma < 1$ . En d'autre terme la fonction d'auto-corrélation suit une loi puissance. Ceci implique que dans le domaine fréquentiel, on a également une loi puissance  $1/f^\beta$  ( $\beta = 1 - \gamma$ ).

## 8.3. L'auto-similarité

Le mouvement brownien fractionnaire a également un caractère fractal, révélé par des phénomènes d'auto-similarité ou d'invariance d'échelle. L'auto-similarité d'un objet fractal renvoie au fait que l'objet peut être décomposé en sous-unités, puis en sous-sous unités, qui possèdent les mêmes propriétés statistiques que l'objet global. Quelle que soit l'échelle d'observation, on observe donc des caractéristiques identiques. Pour mettre en évidence

l'auto-similarité d'une courbe représentée en deux dimensions, on sélectionne un segment de la courbe, et on applique aux deux échelles un facteur identique d'amplification. Les propriétés statistiques de la courbe ré-étalonnée doivent être similaires à celles de la courbe d'origine.

Ce concept de structure fractale peut être étendu aux séries temporelles. L'auto-similarité signifie alors qu'en moyenne, les fluctuations sur une échelle de temps sont similaires aux fluctuations sur d'autres échelles de temps. Cette extension pose cependant problème. Si une série temporelle est classiquement représentée sur un plan en deux dimensions, ces deux dimensions renvoient à des grandeurs physiques différentes (le temps en abscisse, la variable évoluant dans le temps en ordonnée). On aura donc besoin de deux facteurs d'amplification distincts (un pour le temps, et l'autre pour la variable).

Un certain nombre d'auteurs ont proposé des méthodes d'analyse des processus stochastiques, exploitant les principes décrits précédemment. Les plus fréquemment utilisées sont la *Rescaled Range Analysis*, La *Detrended Fluctuation Analysis*, et la *Power Spectral Analysis*.

#### **8.4. Fractalité et systèmes dynamiques**

Quelques travaux ont appliqué les méthodes précédemment évoquées à l'étude de séries temporelles biologiques. Peng et al. (1993) montrent que le rythme cardiaque ne peut être considéré comme un rythme sinusoïdal régulier. Chez des patients sains, la DFA révèle des coefficients  $\alpha$  proche de 1, révélant un processus fractionnaire brownien de type bruit rose. Par contre on retrouve chez des patients souffrant d'insuffisance cardiaque congestive des exposants proche de 1.3 (c'est-à-dire voisins du mouvement brownien). Cette différence suggère une altération des corrélations à long terme. Des analyses similaires ont été réalisées chez des sujets âgés (68-81 ans), et sains. Ce travail révèle deux comportements différents suivant que l'analyse porte sur le court ou le long terme. A court terme, la série se comporte comme un bruit brownien ( $\alpha=1.5$ ), alors que sur le long terme elle peut être assimilée à un bruit blanc ( $\alpha=0.5$ ). Les auteurs montrent en outre l'intérêt prédictif de la DFA, dans une perspective clinique (voir aussi Absil *et al.*, 1999).

Hausdorff et al. (1996) analysent des séries de durée de pas lors de la marche. Ils mettent en évidence le caractère fractal de la durée du pas, chez des sujets sains marchant à allure normale, avec un exposant  $\alpha$  de 0.83. Par ailleurs, ce caractère fractal n'est pas altéré si l'on impose des vitesses lentes ou a contrario élevées. Cependant, ce caractère fractal disparaît si l'on impose une fréquence par un métronome auditif (l'exposant est alors proche de 0.5). Un autre travail compare les séries temporelles obtenues avec des sujets jeunes et des sujets âgés. Le caractère fractal de la série est confirmé chez les sujets jeunes ( $\alpha=1.04$ ), mais la série semble plus aléatoire chez les sujets âgés ( $\alpha=0.56$ ). Ces différences, qui ne sont pas détectables en termes de moyenne et d'écart-type, pourraient se révéler cruciales dans l'analyse des causes de chute chez les personnes âgées. On trouve également des séries plus aléatoires chez des patients atteints de maladies neuro-dégénératives telles que les syndromes de Parkinson ou de Huntington. Dans le cas de la maladie de Huntington, le coefficient  $\alpha$  est d'autant plus faible que la maladie est sévère, allant jusqu'à des coefficients inférieurs à 0.5, indiquant l'apparition d'un nouveau type de dynamique, anti-persistante. L'ensemble de ces résultats suggère l'importance du système nerveux central dans la génération du caractère fractal de la marche.

Gilden, Thomton et Mallon (1995) mettent en évidence la présence de bruit rose (1/F) dans plusieurs expérimentations, dans lesquelles les sujets devaient reproduire après présentation un intervalle de temps ou un intervalle spatial. Selon les auteurs, l'universalité du bruit 1/F suggère que les événements ne sont pas la conséquence d'interactions physiques particulières, mais plutôt l'expression de systèmes dynamiques non-linéaires. Yamada (1995) met dans la même logique en évidence le caractère fractal de la production répétée de mouvements du doigt (avec un exposant de Hurst de 0.898).

D'une manière générale, ces travaux montrent que des phénomènes classiquement considérés comme l'expression d'états d'équilibre (c'est-à-dire une fluctuation aléatoire autour d'une valeur moyenne), présentent en fait un caractère fractionnaire brownien. Ces phénomènes présentent un caractère chaotique, c'est-à-dire une évolution imprévisible, quoique se déroulant dans des limites déterminables, et caractérisée par des corrélations à long-terme et de l'auto-similarité. Ce caractère chaotique semble essentiel pour la viabilité du système, et on a pu voir que les altérations du fonctionnement normal débouchaient généralement sur une réduction de la fractalité.

## 9. ANALYSE DU MOUVEMENT DANS L'ESPACE DES PHASES

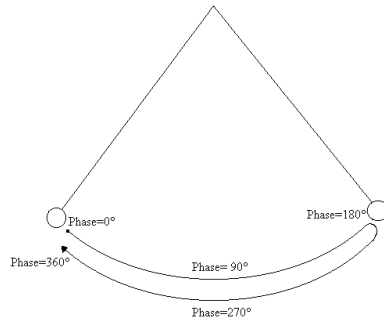
### 9.1. Définition du concept de phase

Le comportement d'un oscillateur peut également être modélisé dans l'espace des phases. Cet espace des phases est une représentation du comportement d'un système oscillant selon ses coordonnées position et vitesse. Par définition, la phase est égale à :

$$\theta = \tan^{-1}(\dot{x}/x), \quad (6)$$

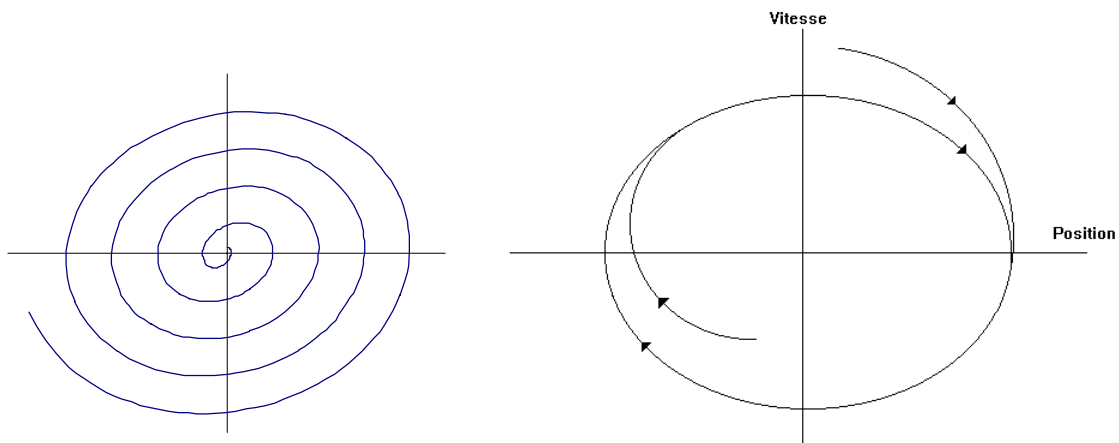
$\dot{x}$  et  $x$  ayant été préalablement standardisé (soit par un rééchantillonnage dans l'intervalle  $[-1, 1]$ , soit par division par l'écart-type de la distribution. On peut noter que le calcul de la phase suppose un filtrage préalable adéquat des données expérimentales. La phase est exprimée en degrés. Les points de revirement de l'oscillateur correspondent aux phases 0 et 180, et les passages à la position de repos aux phases 90 et 270.

L'espace des phases permet une description visuelle particulièrement intéressante des oscillateurs et des attracteurs qui les caractérisent. Par exemple le mouvement d'un pendule pesant à friction peut être modélisé à partir de la phase de son angle par rapport à la verticale. Le portrait de phase décrit une spirale convergente au centre de l'espace. Le système possède un attracteur point fixe, qui est la position d'équilibre stable du pendule.



*Illustration du concept de phase, sur un pendule pesant.*

Si le système reçoit à chaque cycle une force extérieure (c'est le cas de l'oscillateur de van der Pol, dont on a parlé précédemment), les oscillations vont être entretenues, et le portrait de phase mettra en évidence un cycle limite, trajectoire orbitale se répétant de cycle en cycle. Le cycle limite attire les trajectoires dans l'espace des phases. En cas de perturbation (ralentissement ou accélération du pendule), la trajectoire revient rapidement sur le cycle limite.



*Représentation d'un attracteur point fixe et d'un attracteur cycle limite, dans l'espace des phases.*

Les attracteurs définis précédemment ont respectivement 1 et 2 dimensions. Des attracteurs plus complexes peuvent être décrits, par des tores à  $n$  dimensions.

Les systèmes les plus complexes (équations différentielles d'ordre supérieur à deux) présentent généralement des attracteurs chaotiques. Dans ce cas les trajectoires du portrait de phase ne peuvent être modélisées de manière aussi stricte. Néanmoins on observe une quasi périodicité, et seules certaines régions de l'espace de phases sont visitées par la trajectoire.

La définition de la phase lui confère un certain nombre de propriétés. Tout d'abord, la phase est proportionnelle au temps, ou à la fraction du cycle parcouru. Par conséquent, la dérivée première de la phase est égale à la fréquence propre du pendule (la représentation graphique d'une phase, par rapport au temps, produit de ce fait une courbe caractéristique en dents de scie).

$$\dot{\theta} = \omega \quad (7)$$

La phase permet de décrire les mouvements de l'oscillateur en faisant abstraction de l'amplitude réelle. Le rayon du portrait de phase représente l'énergie contenue dans le système:

$$E = (\dot{x}^2 + x^2)^{1/2} \quad (8)$$

Dans le cas d'un oscillateur harmonique, le rayon reste constant. Ce qui est logique puisqu'il n'y a aucune dissipation, mais un échange constant entre énergie cinétique et énergie potentielle.

## 9.2. Traitements statistiques dans l'espace des phases.

1. Soit  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  un échantillon de  $n$  phases. Chaque phase peut être représentée par un vecteur. Les coordonnées du vecteur résultant  $R$  sont déterminées selon:

$$R_x = (\sum \cos\theta_j)/n \quad \text{et} \quad R_y = (\sum \sin\theta_j)/n$$

La longueur de ce vecteur peut être calculée à partir de ses coordonnées. C'est une mesure de l'uniformité de l'échantillon (similaire à la variance). La longueur du vecteur résultant varie de 0 à 1.

$$|R| = \sqrt{(R_x^2 + R_y^2)}$$

La phase moyenne peut alors être déterminée par  $\theta = \arctg(R_y/R_x)$

Lors du calcul de  $\theta$ , le résultat est en fait  $\theta + i\pi$ , avec  $i=1$  ou  $i=0$ . Le choix de  $i$  dépend du quadrant dans lequel le vecteur résultant se situe.

2. Le test de Rayleigh (Mardia et al., 1979) permet de déterminer l'uniformité de l'échantillon, dans le cas où  $n$  est grand. On calcule la valeur  $2n|R|^2$ . Cette valeur est comparée avec la valeur critique de  $\chi^2$ .

3. La comparaison de données directionnelles issues de multiples groupes est aussi possible.

Soient  $q$  échantillons de  $n_j$  phases.  $N = \sum n_j$

$R_j$  est la longueur du vecteur résultant de chaque échantillon, et  $R$  est la grandeur du vecteur résultant total.

$$R_j = \sqrt{[(\sum_1^n \cos\theta_j)^2 + (\sum_1^n \sin\theta_j)^2]} \quad \text{et} \quad R = \sqrt{[(\sum_1^N \cos\theta_j)^2 + (\sum_1^N \sin\theta_j)^2]}$$

$$\text{Test} = (N-q)(\sum R_j - R)/(q-1)(N - \sum R_j)$$

Cette statistique est comparée à F, avec q-1 et N-q ddl.

4. La variance circulaire varie de 0 à 1. On peut transformer cette variance pour obtenir une mesure de l'uniformité variant de 0 à  $\infty$ :  $s_0 = \sqrt{-2 \log_e(1-S_0)}$

Cette mesure correspond à la variance classique et permet l'utilisation des tests inférentiels basés sur la loi normale.

## Références

Burgess-Limerick, R., Abernethy, B. & Neal, R.J. (1991). Note: a statistical problem in testing invariance of movement using the phase plane model. *Journal of Motor Behavior*, **23**, 301-303.

### 9.3. Variables collectives pour les systèmes d'oscillateurs couplés.

Deux types de variables collectives sont principalement utilisées dans la littérature. Lorsque les deux oscillateurs sont isochrones, on a recours au décalage de phase. Soient deux oscillateurs caractérisés par des trajectoires sinusoïdales:

$$\begin{aligned}x_1 &= a \sin(\omega t + \theta_1) \\x_2 &= b \sin(\omega t + \theta_2)\end{aligned}$$

Le décalage de phase est défini par  $\phi = \theta_1 - \theta_2$ . Lorsque  $\phi = 0$ , les deux oscillateurs sont en phase. Ils sont en antiphasse lorsque  $\phi = 180^\circ$ .

La phase relative permet d'évaluer la position relative de deux oscillateurs, à l'intérieur de leurs cycles d'oscillation. Elle est définie par la différence entre les phases des deux oscillateurs.

La phase relative peut être estimée en continu, c'est-à-dire que l'on mesure la différence des phases à chaque temps d'observation. La phase peut également être estimée de manière ponctuelle, à des moments clés de la coordination : par exemple lorsque l'un des oscillateurs atteint la phase 0 ou la phase 180 (points de revirement).

Une première manière de calculer la phase relative consiste à utiliser l'équation précédente :

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \tan^{-1}(\dot{x}_1/x_1), & \text{et } \theta_2 &= \tan^{-1}(\dot{x}_2/x_2), \\ \phi &= \theta_1 - \theta_2\end{aligned}$$

Ce calcul repose cependant sur une différenciation de la série, et est donc sensible au bruit, notamment lorsque les oscillateurs atteignent leurs points de revirement (vitesse minimale).

Un autre mode de calcul repose sur une logique temporelle. On mesure la période (T1) de l'oscillateur 1, entre deux occurrences d'un point de revirement. On note le temps (T2) séparant l'occurrence de ce point de revirement pour l'oscillateur 1 et son occurrence pour l'oscillateur 2. Le rapport T2/T1, converti en degré, donne une mesure de la phase relative.

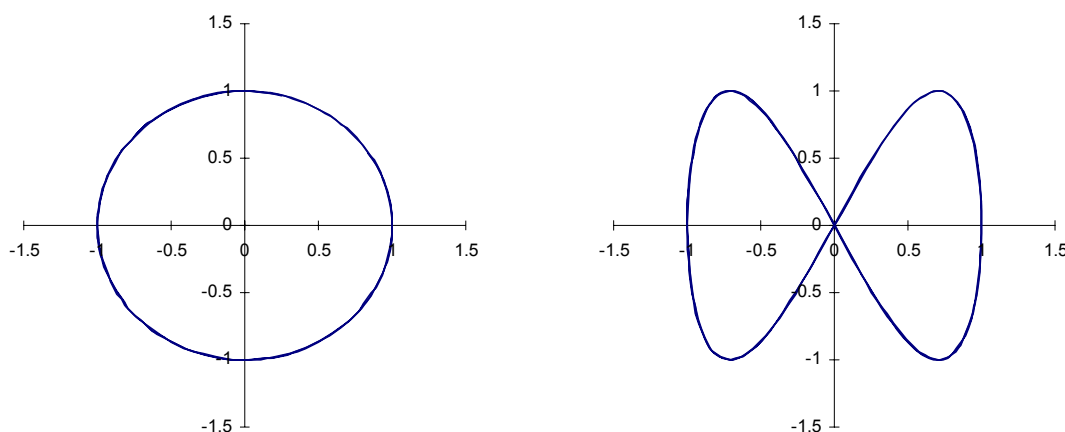
Une autre méthode peut être utilisée pour obtenir l'estimation de la phase relative moyenne sur plusieurs cycles : on calcule les fonctions d'auto-corrélation et de cross-corrélation entre les deux séries temporelles. Le premier maximum de la fonction d'auto-corrélation donne la période des oscillateurs. Le premier maximum de la fonction de cross-corrélation exprime le décalage entre les deux oscillateurs. La phase relative est donnée par le rapport entre ces deux maximums, exprimé en degrés.

Soient deux oscillateurs présentant des fréquences différentes

$$x_1 = a \sin(\omega_1 t + \theta_1)$$

$$x_2 = b \sin(\omega_2 t + \theta_2)$$

Dans ce cas une variable collective pertinente est le rapport de fréquence  $\omega_1/\omega_2$ . Cette variable collective peut être représentée par les figures de Lissajous, consistant en un graphique avec  $x_1$  en abscisse et  $x_2$  en ordonnée. Dans le cas d'un rapport de fréquence de 1:1, la figure de Lissajous a une forme linéaire ou circulaire, et une forme de 8 dans le cas d'un rapport 2:1.



*Figures de Lissajous, obtenues pour un rapport de fréquence 1:1 (décalage de phase 90°), et pour un rapport de fréquence 2:1.*

Swinnen, Dounskaia, Walter & Serrien (1997). utilisent également le rapport des vitesses de phase (PVR, phase velocity ratio), défini comme le rapport des dérivées premières des phases de chaque oscillateur

$$PVR = \theta R' / \theta L'$$

Les auteurs travaillent sur une tâche de coordination de rapport 2:1. Dans ce cas un rapport de deux est attendu, et la dynamique du PVR permet d'identifier les accidents et compensations à l'intérieur des cycles. Le PVR est analysé au niveau de la déviation moyenne par rapport à la valeur attendue, la variabilité du PVR. Le PVR est également traité par moyennage dans un certain nombre d'intervalles du cycle de la phase relative, et également du cycle de la phase de l'oscillateur le plus lent.

L'expérience montre que les sujets adoptent un mode préférentiel caractérisé par la synchronisation des points de revirement.

## 10. CONSTRUCTION DE MODELES DYNAMIQUES A PARTIR DES DONNEES CINEMATIQUES

Un certain nombre d'auteurs se sont attachés récemment à la modélisation des systèmes complexes en tant qu'oscillateurs auto-entretenus (e.g Beek & Beek, 1988; Beek, Schmidt, Morris, Sim & Turvey, 1995; Beek, Rikkert & van Wieringen, 1996). Leur but est de déboucher sur des modèles macroscopiques, contenant un faible nombre de paramètres, et capables de capturer les traits essentiels de l'évolution du système dans le temps. Ces équations dynamiques de mouvement expriment à un niveau abstrait les interactions entre les différents éléments constitutifs du système. Dans ce cadre, les mouvements rythmiques sont modélisés comme des oscillateurs obéissant à des équations différentielles de second ordre de type:

$$m\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0, \quad (3)$$

dans lesquelles  $x$  représente la position, et la notation pointée est utilisée pour représenter les dérivées temporelles. Le premier terme représente l'inertie du système, le second l'amortissement, et le troisième la raideur. L'objectif majeur de ces approches est d'identifier les fonctions non-linéaires d'amortissement et de raideur qui sont exploitées pour la production du mouvement rythmique.

Beek et Beek (1988) ont montré qu'un catalogue réduit de termes étaient autorisé pour la composition des fonctions d'amortissement et de raideur.  $g(x)$  est composé de termes issus de la série de Duffing ( $x^1, x^3, x^5, \dots$ ), et  $f(x, \dot{x})$  de termes issus de la série de Van der Pol ( $x^0, x^2, x^4, \dots$ ) et/ou de la série de Rayleigh ( $\dot{x}^0, \dot{x}^2, \dot{x}^4, \dots$ ), séparément ou en combinaison. Ils montrent également la possibilité, en plus des non-linéarités bien connues de Rayleigh et Van der Pol, d'un nouveau type de séries qu'ils appellent les séries  $\pi$ -mix.

On peut développer à titre d'exemple l'oscillateur décrit par van der Pol. Il s'agit d'un oscillateur obéissant à une équation du type:

$$\ddot{x} = (1 - x^2)\dot{x} - x = \dot{x} - x^2\dot{x} - x \quad (4)$$

L'amortissement de ce pendule est négatif lorsque  $x > 1$  (donc le système perd de l'énergie), et positif lorsque  $x < 1$  (le système gagne de l'énergie). Cet oscillateur est donc asservi à l'amplitude de ses oscillations. L'oscillateur de Rayleigh présente pour sa part un asservissement à la vitesse.

La stratégie de modélisation utilisée par Mottet et Bootsma (1998) est basée sur l'étude de cycles moyens normalisés, supposés rendre compte de l'organisation dynamique qui

émerge en réponse aux contraintes qui pèsent sur le système. On suppose que l'attracteur ne varie pas dans l'échelle de temps de l'observation, et que les fluctuations microscopiques constituent un bruit aléatoire, perturbant en continu le système autour de son pattern moyen. Ce bruit est supposé être éliminé par le processus de moyennage.

Cette méthode suppose que l'on dispose de séries temporelles rendant compte d'un certain nombre de cycles. Ces données doivent être filtrées au préalable. Dans un premier temps, la série est segmentée en demi-cycles d'un point de revirement au point de revirement suivant. Puis chaque cycle est normalisé selon un nombre constant de points équidistants, et rééchantillonné dans l'intervalle  $[-1,+1]$ . Les demi-cycles normalisés commençant par le même point de revirement (i.e. un maximum) sont ensuite moyennés point par point, et le cycle normalisé moyen est reconstitué en accolant les deux demi-cycles. On peut ensuite calculer les dérivées première et seconde de ce cycle moyen, qui sont également rééchantillonnées dans l'intervalle  $[-1,+1]$ .

La méthode combine ensuite des analyses graphiques qualitatives, pour identifier les termes non-linéaires sous-tendant la dynamique du système, et des procédures statistiques quantitatives, pour estimer l'importance relative de chaque composant.

Dans un premier temps on peut utiliser les portraits de Hooke (position vs. accélération) pour une estimation directe de la fonction de raideur (Mottet & Bootsma, 1998). Le portrait de Hooke produit une droite pour un oscillateur harmonique parfait ( $\ddot{x}+x=0$ ), et toute déviation de cette droite donne de bonnes informations sur les termes non-linéaires à inclure dans le modèle. Par exemple le terme cubique de Duffing produit une courbe typique en N, suggérant un comportement de ressort mollissant (Mottet & Bootsma, 1998).

La détermination des termes pertinents d'amortissement n'est pas aussi aisée. Beek et Beek (1988) ont proposé une méthode, dite W-method, basée sur une analyse de régression multiple. Leur point de départ est une équation du type:

$$\ddot{x} + x + W(x, \dot{x}) = 0, \quad (5)$$

dans laquelle  $W(x, \dot{x})$  résume la contribution de l'ensemble des composantes non-linéaires du mouvement (c'est-à-dire la déviation continue par rapport au mouvement harmonique parfait).  $W(x, \dot{x})$  peut facilement être calculé à partir des données expérimentales, et est utilisé comme variable dépendante dans une régression multiple contre tous les termes permis (i.e.  $x$ ,  $x^3$ ,  $x^5$ ,  $\dot{x}$ ,  $\dot{x}^3$ ,  $x^2\dot{x}$ , voir Beek & Beek, 1988), afin de déterminer quels coefficients ont une influence significative sur les variations de  $W(x, \dot{x})$  dans le temps.

Beek *et al.* (1995) notent que la précision de la W-method est meilleure pour l'estimation des termes conservatifs de raideur, que pour les termes non-conservatifs d'amortissement, dans la mesure où la méthode peut souffrir de l'inaptitude de la régression à prendre en compte les contraintes de signe sur les coefficients d'amortissement nécessaires à la production d'un cycle limite. Pour obtenir un oscillateur auto-entretenu, le terme d'amortissement linéaire doit en effet être négatif, et au moins un des termes non-linéaires doit être positif. Mottet and Bootsma (1998) notent que l'utilisation de la régression multiple sur tous les termes possibles pour  $W(x, \dot{x})$  donne dans la plupart des cas des résultats inconsistants (par exemple, des modèles instables, ou des termes d'amortissement non-significatifs). C'est pourquoi on utilise dans un premier temps des méthodes graphiques pour dériver un modèle minimal avant d'appliquer la W-method.

Pour isoler la contribution des termes non-linéaires, on commence par réaliser une régression de  $\ddot{x}$  contre tous les termes linéaires et non-linéaires de raideur, précédemment identifiés, et l'amortissement linéaire ( $\dot{x}$ ). Les résidus (RES) de cette régression sont sensés refléter la contribution de l'amortissement non-linéaire sur le comportement du système. La méthode proposée par Beek et Beek (1988), consiste alors, pour rechercher un comportement de type Van der Pol, à représenter RES/ $\dot{x}$  en fonction de  $x$  (on recherche alors la présence de paraboles, exprimant la présence de termes en  $x^2$  ou  $x^4$ ), et pour un comportement de type Rayleigh, à représenter RES en fonction de  $\dot{x}$  (on recherche alors des courbes en N, révélant la présence de termes en  $x^3$ ).

Le but de cette analyse graphique est de déterminer un modèle dynamique minimal, contenant le moins de termes possibles. Ensuite l'importance relative de chaque coefficient est évaluée par une procédure de régression multiple (W-method, Beek and Beek, 1988).

L'équation de mouvement obtenue, caractérisée qualitativement par la nature des termes la composant, et qualitativement par leur importance relative, constitue un paramètre d'ordre dont on pourra tester la stabilité et l'évolution en fonction de diverses dimensions de la situation.